RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 dicembre 1904.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *Su alcuni terreni eocenici della Dalmazia.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

La fauna nummulitica dell'Appennino settentrionale in Italia, quantunque attissima a dar la chiave dell'età dei nostri terreni eocenici, fu sempre assai trascurata. Lo stesso può dirsi delle faune nummulitiche eoceniche del versante adriatico orientale, quantunque ivi si tratti sovente di faune numerosissime e ben conservate. Si può dire che i primi studî sopra faune eoceniche complete e raccolte sul luogo nella parte continentale, escludendo l'Istria, sieno stati quelli del Frauscher sulla fauna di Bribir in Croazia, del Martelli sulle Nummuliti di Spalato raccolte in massima parte da me prima che cominciasse il rilevamento da parte dell'Istituto geologico di Vienna, e sulle Nummuliti di Metkovich, e quelli del Dainelli sulle faune di Promina e dei Ponti di Bribir in Dalmazia.

Due valenti giovani, che hanno avviato il rilevamento geologico in Dalmazia, i signori Kerner e Schubert, con un metodo molto usato fra i pertinenti all'Istituto geologico austriaco, ma che è desiderabile non sia trapiantato fuori, hanno vivamente criticato l'opera del loro predecessore dott. Martelli, non sostanzialmente dal punto di vista paleontologico, ma soltanto perchè non si è occupato minutamente della stratigrafia di quei luoghi e non l'ha interpretata nel modo voluto dai signori Kerner e Schubert.

Il Martelli si occupò solo della situazione precisa degli abbondanti e belli materiali da lui raccolti e determinò la possibile posizione cronologica delle sole faune raccolte e dei luoghi relativi secondo i criterî generali noti, supponendo, ad esempio, più recenti gli strati nei quali apparisce la coppia di *Nummulites complanata* e *Tchihatcheffi*. Bensì può darsi, anzi io lo credo fermamente, come ne esprime dubbio il Kerner, che la presenza di quella coppia in certi strati e non in altri sia legata a differenze talassografiche e non sempre cronologiche. Tolto questo, le osservazioni di Kerner e Schubert non variano la situazione dei due capisaldi stratigrafici che sono i terreni eocenici antichi del monte Marian e la Creta di Clissa.

Il Martelli non ha interloquito più oltre nella questione stratigrafica, ma avrebbe potuto soggiungere i dubbî miei, che in parte sembrano condivisi dagli stessi proponitori della questione, che cioè l'interpretazione stratigrafica dei due geologi austriaci, salvo in quanto riguardi i due capisaldi predetti, non sia ben sicura. Essi prendono a punto di partenza assoluto la serie degli strati quale fu stabilita da tempo per la parte settentrionale del littorale; prendono cioè un punto di partenza litologico piuttosto che paleontologico, e dove vedono ripetersi strati di un determinato tipo litologico, dove vedono inversioni e contorsioni, ivi scorgono il ripetersi di anticlinali e di sinclinali, aggiungendo ripetute faglie ed interruzioni là dove manchi alcuna delle presupposte zone intermedie. Così fra il monte Marian e Clissa essi suppongono l'esistenza di quattro anticlinali o pieghe convesse, e chiamano *Klippen* i banchi di calcare compatto che a più riprese si incontrano.

Ma in regioni sufficientemente turbate come queste, le inversioni negli strati non possono considerarsi quali prove dell'esistenza di sinclinali e di anticlinali, a meno che di questi si osservi la reale esistenza, ciò che essi non accennano, nè a me pure fu dato vedere. Quanto alla serie litologica degli strati che essi prendono a fondamento delle loro conclusioni, io non la credo esatta.

Per gran tratto del littorale, da nord fin quasi alle bocche di Cattaro, la zona inferiore dell'Eocene è abbastanza uniformemente rappresentata da calcari marnosi a *Miliolinae, Peneroplis, Alveolinae*, o, come dice Schubert, da calcari ad *Imperforate*. Le formazioni eoceniche successive, come nella penisola italiana, sono influenzate dalla esistenza di rocce emerse cristalline nella regione delle Alpi. Le roccie eoceniche che ne derivarono in ambedue le penisole, italica e balcanica, furono di origine meccanica per gran tratto verso sud come il *Macigno* o *Masegno* ed il *galestro* o *tassello*. *Masegno* e *tassello* si trovano sopra l'Eocene inferiore da nord dell'Istria fino a Novi in Croazia e nelle isole del Quarnero. Qua e là alternano calcari o brecciole nummulitiche, quali nell'Istria diconsi *granito* e nei dintorni di Firenze *granitello*. In tali terreni trovansi le faune di San Giovanni Ilarione e di Roncà. Nel Quarnero, come nel versante opposto in Toscana, le *Alveolinae* seguitano nelle arenarie fin negli strati superiori.

A mezzogiorno delle formazioni arenacee, come in Italia, predominano nell'Eocene formazioni argillose finissime di mare più profondo, insieme a calcari, ovvero calcari soli. Presso i littorali ed i bassi fondi, non più costituiti da rocce cristalline, formavansi brecce e conglomerati calcarei, come specialmente fra Zara e Scardona e meno più a sud.

Marne, calcari marnosi, calcari compatti, con qualche arenaria e conglomerati alternano replicatamente; nè le sezioni osservate in un luogo possono servire di campione per altri luoghi. Oltre le Nummuliti diffuse ovunque e talora predominanti, o sole, sono per tutto, da nord almeno fino a Spalato, e dentro terra, dove le rocce non sieno tutte calcaree, faune abbondanti e svariate, salmastre, littorali, delle laminarie, coralligene, di mare profondo. In varî casi esse sono equivalenti e quasi contemporanee fra loro piuttosto che successive.

Nella successione delle *Alveolinae, Nummulites, Orbitoides* può stabilirsi una certa serie; pure varie specie sembrano connesse con certe forme litologiche piuttosto che con altre. L'*Orbitoides ephippium* abbondante nelle marne non la trovai altrove; certe specie si trovano anche negli strati salmastri del tipo di Roncá; ma altre vi mancano sempre.

Le *Nummulites complanata* e *Tchihatcheffi* preferiscono le zone calcaree. Ora la successione degli strati fra Clissa e monte Marian supposta da Kerner e Schubert non suffragata da basi paleontologiche, nè da una vista diretta di sinclinali ed anticlinali, ha precipuamente basi litologiche, ed io credo si tratti in tutto od in massima parte di semplici alternanze di *facies*. Potranno recare molto aiuto gli studî paleontologici più accurati delle ricche faune di quelle regioni.

Lo Stache ha studiato l'Eocene inferiore dell'Istria. L'Oppenheim ha tentato uno studio comprensivo di quelle faune con scarsi materiali raccolti da altri; Frauscher studiò i fossili di Bribir in Croazia; Martelli quelli di Spalato e di Metkovich; Dainelli quelli d'Ostroviza e dei Ponti di Bribir in Dalmazia.

Questi fossili appartengono all'Eocene medio, al piano di San Giovanni Ilarione nel Vicentino, talora con *facies* di Roncà. Quelli d'Ostroviza e dei Ponti di Bribir sono compresi fra arenarie ad *Alveolinae* alla base e marne ad *Orthophragmina ephippium*, *O. papyracea*, *O. aspera*, *O. dalmatina* Martelli, *Nummulites perforata* in alto. Queste marne sono da alcuni attribuite già all'Eocene superiore, ma credo appartengano ancora al medio; d'altra parte le stesse *Orthophragminae* altrove si raccolgono anche alla base dell'Eocene medio. Arenarie ad *Alveolinae* alternano ancora alla base degli strati fossiliferi dell'Eocene medio nel detto luogo e questi contengono diffusi qua e là la coppia di *Nummulites perforata* e *Lucasana* con *Assilina exponens* ed *A. mammillata*.

Nella regione più meridionale, come in Italia, così nella Dalmazia, nell'Er-

zegovina, nel Montenegro, nell'Albania, in Grecia e nelle isole adriatiche e ionie prospicenti, le marne dell' Eocene inferiore e medio vanno diventando sempre più calcaree; queste e le arenarie vanno poi sempre più diminuendo fino a cessare talora completamente per dar luogo a calcari per lo più semicristallini, a volte con lenti di selce e solamente, o quasi, contenenti *Nummulites*, *Assilinae*, *Orbitoides*.

Non fu ancora determinato paleontologicamente con precisione quale parte degli strati nummulitici della Dalmazia centrale e del littorale più a settentrione appartenga all' Eocene superiore. Nelle marne di Banjevac il Schubert trovò la *Clavulina Szaboi* Hantk., ed altre foraminifere comuni con le marne di Ofen; anche le marne di Dabriča in Erzegovina, secondo Oppenheim, appartengono allo stesso livello. Nella Dalmazia a sud delle Bocche, nella Erzegovina, in Montenegro, nell'Albania la parte superiore dell' Eocene è formata di scarse arenarie, calcari marnosi, calcari screziati, argille schistose che a sud contengono sovente peridotiti e diabasi. È merito dell'infaticabile dott. Martelli aver dimostrato i rapporti di queste roccie con le formazioni serpentinose dell'Appennino settentrionale. In quelle regioni orientali la evidente natura dei terreni sottogiacenti persuade più sollecitamente che in Italia della loro appartenenza all' Eocene superiore, che è il vero piano Liguriano del Mayer non confondibile, come Oppenheim ed altri geologi credono, con l'Oligocene.

Sorse questione fra il Dainelli e l'Oppenheim sull'età dei terreni di monte Promina in Dalmazia. Il primo ne studiò una abbondante fauna, raccolta o vista in molta parte sui luoghi anche da me; il secondo ne esaminò pochi esemplari da lui non raccolti. Può darsi che fra i materiali avuti da altri sia scivolato qualche elemento eterogeneo tanto pel Dainelli quanto per l'Oppenheim; ma fondato sui materiali di gran lunga più abbondanti e sui più sicuri, il Dainelli attribuì quei terreni a parte dell'Oligocene, al Tongriano; nè in verità, considerando i rapporti strettissimi ch' essi hanno col Tongriano piuttosto littorale della Liguria, si può arrivare a conclusione diversa. Oppenheim invece li attribuisce al *Priaboniano*, piano che Munier — Chalmas e De Lapparent ricavarono da Priabona nel Vicentino e che Oppenheim intenderebbe essere quasi un passaggio dall' Eocene alla parte inferiore dell'Oligocene, ed equivalente al vecchio piano *Liguriano* del Mayer. L'Oppenheim non mette nel *Priaboniano* l'Oligocene della Liguria ed i terreni affini perchè son sovrapposti al tipico *Liguriano* che egli ingiustamente crede già Oligocenico, e perchè que' terreni hanno una fauna più littorale dell'Oligocene vicentino; nè l'Oppenheim sembra ancora appieno persuaso delle enormi differenze di faune che sono fra terreni contemporanei secondo le profondità oceaniche nelle quali si originarono.

Ora se gli strati di Promina si vogliano paragonare all'Oligocene Tongriano di Lavarda, Castelgomberto, Sangonini, nel Vicentino, siamo nel vero,

e tale infatti è la classificazione proposta dal Dainelli: se poi li vogliamo appellare *Priaboniani* lasciando adito ad una possibile confusione con l'Eocene di Priabona col quale non hanno pur un fossile a comune, in tal caso diamo origine a quella confusione che val meglio evitare.

Le argille marnose più alte di monte Promina nelle quali io raccolsi sul posto varî fossili, appartengono certamente ad un Oligocene non antico. I geologi che rilevano la Dalmazia equiparano agli strati di Promina le marne di molte regioni vicine; però essi si fondano soltanto sopra analogie litologiche, mentre la massima parte almeno di quelle marne è certamente più antica di Promina e può appartenere veramente all'Eocene superiore; ma in parte quelle a *Nummulites perforata* e *Lucasana*, p. e. quelli di Lišane, certo anche al medio.

Biologia. — *Ricerche preliminari dirette a precisare le cause del gozzo e del cretinismo endemici* (1). Quarta Nota del Socio B. Grassi e del dott. L. Munaron.

Abbiamo continuato le nostre ricerche e i risultati ottenuti, benchè ci dimostrino che la meta è ancora lontana, c'incoraggiano a proseguire e ci sembrano meritevoli di essere segnalati.

Durante l'estate e l'autunno scorso abbiamo intrapreso un esperimento che ci sembrava necessario per quanto lungo e costoso.

Questo esperimento fu fatto in Ardenno nella bassa Valtellina, località dove il gozzo è diffusissimo e non fanno difetto i cretini e i sordo-muti.

In un cortile annesso alla casa del sig. Cesare Visconti Venosta (2), abbiamo collocato i cani di cui parleremo, in due gabbie di ferro col tetto di zinco a piovente e sporgente, lunghe circa m. 2,25, larghe circa 80 cm. e alte circa 80 cm., il fondo era coperto di lamiera di ferro, mobile. Un diaframma pure in ferro permetteva di dividere la gabbia in due metà, facilitando così la pulizia senza pericolo che i cani uscissero. Ogni metà era provvista di uno sportello mobile di ferro. Queste gabbie stavano sollevate dal suolo per mezzo di sostegni di legno alti circa 88 cm. (Vedi la figura).

Le gabbie ben verniciate venivano riparate dal sole per effetto di un muricciuolo, che distava circa 80 cm. da esse, e di un grande albero di noce.

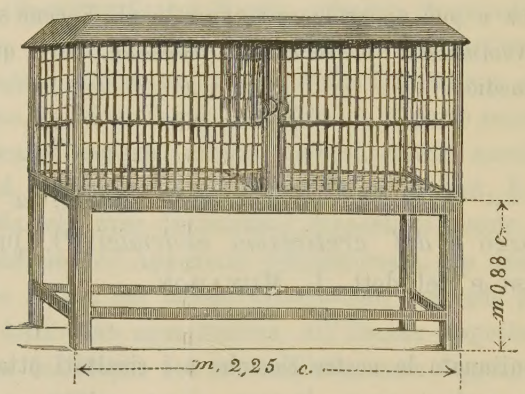
Il suolo era sabbioso, ma piuttosto umido per la vicinanza d'una fontanella d'acqua corrente e disperdentesi nel terreno. Le gabbie venivano pulite

(1) Vedi Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, 1° sem., serie 5ª, fasc. 12°; vol. XIII, 1° sem., serie 5ª, fasc. 1°-2° e fasc. 12°.

(2) Ringraziamo vivamente questo benemerito signore che mise a nostra disposizione la sua casa senza alcun compenso, col solo scopo di favorire i nostri studi.

regolarmente due volte al giorno per mezzo di spazzole e spugne, con soluzione possibilmente bollente di soda al 2-4 %, talvolta anche con soluzione acquosa di sublimato all'1 ‰.

Nelle gabbie veniva collocato il cibo in recipienti lavati e risciacquati con l'acqua che serviva anche per abbeverare i cani e per preparare il nutrimento. Quest'acqua ci venne spedita in due riprese da Nocera Umbra, dentro grandi damigiane suggellate, dalle quali si toglieva con un tubo di gomma previamente sterilizzato, man mano che occorreva. Il nutrimento consisteva



in gallette provenienti da Genova dentro ceste che si conservavano in luogo asciutto. Queste gallette venivano cotte in una caldaia con acqua di Nocera; con questa si sciacquava anche la caldaia e i ferri che servivano per sminuzzare le gallette. Specialmente nei primi tempi si aggiunse a questo cibo anche latte condensato proveniente da Locate Triulzi. Soltanto per alcuni giorni si fece uso di carne di cavallo proveniente da Milano. Cessato l'uso del latte condensato, si aggiunse al cibo caseina in polvere proveniente da Locate Triulzi.

Qualche rara volta, negli ultimi tempi, si fece anche uso di riso proveniente per lo più da Olevano (Lomellina). Il cibo veniva salato con sale del commercio.

Dentro una delle due gabbie fu collocata una cagna con due piccoli di circa un mese e mezzo di età, ancora non del tutto svezzati; in un'altra, un'altra cagna con tre piccoli, pure presso a poco di un mese e mezzo di età e ancora non interamente slattati. Queste cagne coi relativi cagnolini, provenivano da Roma, località immune dal gozzo, ed erano state spedite per treno diretto ad Ardenno, dove erano arrivate il 4 luglio del corrente anno. Uno dei tre cagnolini morì dopo pochi giorni, di cimurro (Vedi più sotto) (le tiroidi erano normali), il che c'indusse a far venire ad Ardenno due altri cagnolini un po' maggiori di età, anch'essi nati a Roma. Questi cagnolini

vennero aggiunti il 15 luglio alla gabbia nella quale era morto il cucciolo suddetto.

Tutti i cagnolini giovani tenuti in gabbia dal più al meno soffrirono di una malattia che per ora giudichiamo cimurro e di un'altra malattia cutanea comunissima, di cui noi ignoriamo la natura. Di questa ultima malattia soffrirono anche le madri.

Sono le stesse malattie, già da noi lamentate anche a Roma e a Rovellasca, che ci hanno fatto morire parecchi soggetti di esperimento e che — ci affrettiamo a notare — in località indenni di gozzo, non ci hanno mai prodotto alcun ingrossamento della tiroide.

Palpammo, per la prima volta nella prima decade di settembre, un ingrossamento della tiroide dal lato destro, in uno dei due cagnolini messi in esperimento il 15 luglio. Questo ingrossamento andò successivamente diventando più evidente e poi rimase quasi stazionario. Il cagnolino in discorso si ammalò di cimurro e del morbo cutaneo, soltanto molto tardi, dopo che l'ingrossamento della tiroide era già molto evidente da più di un mese. Esso fu poco tormentato dalla malattia cutanea, ma morì di cimurro il 3 novembre. La tiroide era relativamente ingrossata, per lo meno, più del doppio del normale, tanto da una parte che dall'altra in modo pressochè uguale.

Verso il 20 settembre la tiroide apparve palpabile da tutte e due le parti e evidentemente ingrossata in un cagnolino tenuto nell'altra gabbia; esso era poco tormentato dalla malattia cutanea e sembrava del resto sano; morì repentinamente di cimurro il 28 settembre. La tiroide da tutte e due le parti era relativamente ingrossata più del doppio del normale.

L'altro cagnolino che era stato in gabbia con questo, morì di cimurro il 10 ottobre; esso presentava la tiroide poco ingrossata.

Morirono di cimurro anche i tre cagnolini che stavano nell'altra gabbia rispettivamente l'8, il 10, il 18 ottobre. In essi la tiroide era normale o quasi. In novembre morirono anche le due madri di una malattia che non possiamo ben precisare; le tiroidi erano subnormali.

A completamento di quanto abbiamo detto, aggiungeremo che dopo che morì il primo cane di cimurro, le gabbie furono imbiancate con calce, che le gabbie furono rinverniciate alla fine di settembre e trasportate sotto una tettoia coperta.

Nell'ambiente in cui si trovavano le gabbie vivevano liberi una cagna coi suoi tre cuccioli arrivati da Roma il 4 luglio; uno di essi morì di cimurro pochi giorni dopo l'arrivo e aveva le tiroidi normali. Il 13 settembre arrivarono da Roma altri sette cuccioli che si lasciarono liberi, due di essi morirono subito di cimurro, due altri morirono rispettivamente il 18 e il 20 ottobre pure di cimurro; le tiroidi in tutti erano normali. I due cuccioli primi arrivati e la loro madre e tre dei cuccioli arrivati da Roma il 13 settembre vivono ancora, soltanto nei primi due si palpa un leggerissimo

ingrossamento della tiroide sorvenuto molto più tardivamente che nei cagnolini in gabbia.

Questo esperimento, dimostra che *il gozzo si sviluppa anche in cani allevati esclusivamente con acqua e con cibi, a cui certo non può attribuirsi azione gozzigena* (acqua di Nocera Umbra, galletta di Genova, caseina in polvere e latte condensato di Locate Triulzi) (1) *e tenuti permanentemente in gabbie sollevate dal suolo per escludere l'influenza diretta di esso. Si può dire,* se ci è permessa la frase, *che solo l'aria appartenesse all'ambiente nel quale si è ottenuto lo sviluppo del gozzo.*

Non si può assolutamente menomare l'importanza dei risultati per il fatto del poco sviluppo raggiunto dal gozzo nel nostro esperimento, perchè questo fenomeno era evidentissimo e indiscutibile come ci assicurano le molte osservazioni comparative fatte sui cani sani o morti delle stesse malattie a Roma e a Rovellasca.

Sorge ora la questione se il veleno gozzigeno si trovi nell'aria libera ovvero contenuto nel pulviscolo sospeso in essa e sorge pure il dubbio che i supposti germi gozzigeni siansi sviluppati sulla pelle, tra i peli dei cani. Certamente sarà importante di ripetere l'esperimento su cani tenuti con pelle rasata e giornalmente disinfettata. Intanto l'esperimento che abbiamo riferito dimostra già molto, sopratutto quando si consideri che evidentemente il gozzo ha tutti i sintomi di un avvelenamento lieve, ma continuo e molto prolungato e non si piglia d'un tratto, ad eccezione delle cosidette epidemie di gozzo, le quali però in nessun caso furono sufficientemente illustrate.

Questo è l'esperimento principale che ci premeva di riferire. Renderemo ora conto del proseguimento degli altri esperimenti dei quali abbiamo già parlato nella Nota precedente.

L'esperimento riferito sotto il numero II nella Nota precedente è stato da noi continuato, ma molto imperfettamente per la nostra prolungata assenza da Roma. Mentre nei mesi precedenti anche per la stagione fresca, l'ambiente in cui si allevavano i cani, quasi non mandava cattivo odore ed i processi di putrefazione potevano perciò dirsi molto limitati, durante l'estate e l'autunno si verificò tutto l'opposto per mesi continui. Man mano gl'ingrossamenti evidenti della tiroide, che si erano notati nei tre cani, scomparvero.

L'esperimento coll'acqua, riferito al numero I della Nota precedente, si prolungò fino al novembre, aggiungendo nel mese di luglio, nuovi cagnolini a quelli preesistenti sottoposti all'esperimento. L'acqua veniva presa molte volte vicino a Cedrasco, dall'Adda, quando era torbida. Il resultato fu sempre negativo e perciò l'esperimento venne da noi interrotto, colla persuasione di non poter ottenere resultati positivi, senza l'intervento di speciali condizioni, che per ora ignoriamo.

(1) Le spese per questo esperimento, furono in gran parte sostenute dal sig. Felice Bisleri di Milano, a cui porgiamo vivissimi ringraziamenti.

Riflettendo sul complesso degli esperimenti da noi fatti ci pare che, fuori dell'ambiente gozzigeno naturale, non si possa ottenere il gozzo che in ambienti chiusi, nei quali siansi accumulati materiali provenienti da luoghi dove il gozzo è endemico. Soltanto così possiamo spiegarci perchè a Roma, ove i cani stavano in una stanzetta colle porte e finestre chiuse tranne un finestrino molto in alto, ottenemmo lo sviluppo di gozzo, mentre a Rovellasca i resultati furono sempre negativi, non ostante che si continuassero con molto materiale fino alla fine d'ottobre del corrente anno, ossia per un periodo di circa un anno e mezzo. Tentammo perciò di ripetere lo stesso esperimento di Roma a Rovellasca, vale a dire in ambiente chiuso, ma finora i resultati sono stati negativi.

* * *

In questo anno la letteratura del gozzo si è arricchita di parecchie pubblicazioni sulle quali i nostri studî ci permettono di pronunciare un giudizio.

Bayon pubblicò una Nota preliminare sostenendo che il gozzo e perciò il cretinismo sono « il seguito di malattie infettive » e che » il perchè della predisposizione deve resultare da speciali esperimenti » da lui intrapresi, ma non ancora compiuti. Ciò non concorda affatto coi nostri esperimenti, e sopratutto con quelli fatti l'anno scorso a Cedrasco, dove i cani presero il gozzo pur restando perfettamente sani.

Il dott. Giani da una serie di esperimenti fatti nel laboratorio del prof. Rattone, ha indotto che « fra le cause del gozzo una sia da ricercarsi nell'impropria alimentazione, congiunta a fatica che si compie in speciali condizioni ». In proposito noi notiamo che da tutto quello che noi abbiamo osservato e sperimentato ci risulta che le cause summentovate sono insufficienti quando l'ambiente non sia gozzigeno. Per un giusto valutamento degli esperimenti in questione, occorrerà perciò esaminare molti cani di Parma per escludere che ivi il gozzo sia endemico in questi animali.

In una breve pubblicazione il dott. Mancioli insiste sulla circostanza che a Monte Celio, provincia di Roma, il sesso maschile è immune dal gozzo, mentre il sesso femminile è colpito con varia intensità nella proporzione circa del 60 %. Egli conclude che « l'eredità la quale nel caso di Monte Celio, pesa solamente sul sesso femminile, predispone all'ipertrofia della tiroide; lo sviluppo di un vero gozzo, più o meno voluminoso, è legato allo stato di denutrizione e di anemia in cui l'organismo viene a trovarsi nei periodi della pubertà, del puerperio e specialmente dell'allattamento che quasi sempre è ripetuto e prolungato ».

Uno di noi (Munaron) si è recato a Monte Celio col proposito di controllare, nell'interesse dei nostri studî, l'asserita immunità dei maschi. Col gentile consenso e aiuto del dott. Rusconi, egregio medico condotto del luogo, potè visitare tutti gli alunni di una scuola maschile, in numero di 23, del-

l'età da 6 a 11 anni. Su 18 di essi venne constatata l'ipertrofia della ghiandola tiroide, in alcuni notevole, in altri meno spiccata, ma evidente, come si riscontra nei paesi dove è endemico il gozzo. Così la pretesa immunità del sesso maschile cade, mentre resta indiscutibile che l'allattamento ripetuto e prolungato e altre cause debilitanti favoriscono l'ingrandimento del gozzo.

***

Diremo infine che abbiamo continuato gli esperimenti sui cretini e sui cretinosi colla tiroidina. Qualche effetto si è otteunto, ma inferiore alla nostra aspettativa, tranne in individui cretinosi di tenera età, nei quali però qualche progresso si verifica anche spontaneamente. Noi crediamo che gli esperimenti debbano essere continuati, trasportando però i cretinosi e i cretini in località dove il morbo non è endemico, sottraendoli, cioè, all'azione dell'ambiente. Per fare questi esperimenti occorrono però mezzi dei quali noi per ora non disponiamo.

Matematica. — *Sul sistema di certe formole di Betti estese.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

Le formole di Betti estese, cui si riferisce la presente Nota, sono quelle che hanno formato oggetto di un'altra mia recente comunicazione [1], alla quale continuamente mi riferirò, proseguendone anche, per evitare confusioni nei frequenti richiami, la numerazione delle formole.

Basterà qui dir solo che mi propongo di ricercare altre estensioni in diversi sensi, delle equazioni di Betti, indi trar profitto delle formole già stabilite per dedurne delle equazioni di Forsyth, e delle altre date da Betti per un caso speciale, e infine trattare della proprietà delle equazioni di Betti estese e completate, cui ho accennato nella Nota precedente.

1. Si può proporsi ancora una estensione delle equazioni (25) ... (29) immaginando che J, oltre contenere le sole variabili x_i, contenga anche le altre $p-2$ serie di variabili *contragredienti* introdotte da Clebsch nella teoria delle forme ultrabinarie e, che indicheremo con x_{ij}, x_{ijh}, ... Ai primi membri delle equazioni (25) ... (29) bisognerà allora aggiungere dei termini contenenti le derivate rispetto a queste nuove variabili, e i coefficienti di tali termini dovranno trovarsi con un metodo analogo a quello che ci ha condotto alle formole (20).

Come si sa, le nuove variabili possono essere rappresentate dai minori di 2° ordine della matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \dots x_p \\ y_1 \dots y_p \end{matrix} \right\|$$

[1] Pascal, *Sopra le equazioni differenziali relative a certi covarianti di forme algebriche.* Rend. Acc. Lincei (5), t. XIII, 1904, 2° sem., pag. 365-373.

ovvero dai minori di 3° ordine dell'altra matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \dots x_p \\ y_1 \dots y_p \\ z_1 \dots z_p \end{matrix} \right\|$$

e così di seguito, in cui le $y, z, \dots$ sieno tante serie di variabili che si immaginino *cogredienti* alle x. Poniamo in generale:

$$x_{s_1 s_2 \dots s_\mu} = \begin{vmatrix} x_{s_1} & x_{s_2} \dots x_{s_\mu} \\ y_{s_1} & y_{s_2} \dots y_{s_\mu} \\ \dots & \dots \\ t_{s_1} & t_{s_2} \dots t_{s_\mu} \end{vmatrix}, \quad (\mu = 1, 2, \dots, p-1) \tag{32}$$

e cerchiamo per queste variabili generali la formola, estensione della (13), e per cui la J si comporti come un *covariante assoluto*.

Adoperando le (5) e indicando con $x'_{s_1 s_2} \dots$ le variabili trasformate, si ha:

$$x'_{s_1 \dots s_\mu} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_\mu} A^{(s_1 \dots s_\mu)}_{\sigma_1 \dots \sigma_\mu} x_{\sigma_1 \dots \sigma_\mu} \tag{33}$$

in cui $A^{(s_1 \dots s_\mu)}_{\sigma_1 \dots \sigma_\mu}$ rappresenta il complemento algebrico in Δ del minore formato colle colonne di indici $s_1 \dots s_\mu$ e colle linee di indici $\sigma_1 \dots \sigma_\mu$, e il sommatorio rispetto alle σ bisogna estenderlo *solo* a tutte le $\binom{p}{\mu}$ combinazioni dei numeri $1, 2, \dots p$. Le s e le σ possono immaginarsi perciò sempre disposte in ordine crescente.

Poniamo ora, più generalmente che in (13),

$$x''_{s_1 \dots s_\mu} = \Delta^{\frac{\mu}{p}} x'_{s_1 \dots s_\mu} = \Delta^{\frac{\mu}{p}-1} \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_\mu}{}''' A^{(s_1 \dots s_\mu)}_{\sigma_1 \dots \sigma_\mu} x_{\sigma_1 \dots \sigma_\mu} \tag{34}$$

e, supposto che J sia di ordine m_μ nelle variabili x a μ indici (*di specie* μ), poniamo in luogo di (14), la trasformazione:

$$\mathrm{P}'' = \left(\frac{\mathrm{P}_{(\alpha)}}{\mathrm{P}} \right) \Delta^{-\frac{1}{\lambda}\left(q + \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{\mu m_\mu}{p} \right)} \cdot \mathrm{P}. \tag{35}$$

Ragionando come nella precedente Nota, si trova agevolmente che *la* J *scritta nelle* z' *date da* (8), *nelle* x'' *e in* P'' *date da* (34), (35), *è eguale alla* J, *cioè che* $\mathrm{J}'' = \mathrm{J}$.

Nella equazione (18) dovranno allora comparire i termini colle derivate rispetto a queste nuove x a più indici; in luogo del secondo gruppo di termini dovrà perciò comparire più generalmente un'espressione:

$$(36) \qquad \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_\mu} X_{s_1 \ldots s_\mu} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \ldots s_\mu}}$$

in cui c'è da ricercare le X, estendendo le formole (20). Inoltre il Π che compare in (18) subisce un lieve mutamento che consiste in ciò che nelle due ultime delle (24) in luogo di m bisogna sostituire $\sum_{\mu=1}^{p-1} \mu m_\mu$.

I coefficienti X sono, al solito, le derivate di x'' rispetto ad $\alpha_k^{(h)}$, quando poi per le α si pongano i valori iniziali (17); osserviamo prima di tutto che

$$\frac{\partial A_{\sigma_1 \ldots \sigma_\mu}^{(s_1 \ldots s_\mu)}}{\partial \alpha_k^{(h)}} = \frac{\partial^{\mu+1} \Delta}{\partial \alpha_k^{(h)} \, \partial \alpha_{\sigma_1}^{(s_1)} \ldots \partial \alpha_{\sigma_\mu}^{(s_\mu)}}$$

e che, pei valori iniziali, tale derivata ha *valore diverso da zero solo quando i due assiemi di numeri*:

$$(37) \qquad \begin{cases} h, s_1, \ldots s_\mu \\ k, \sigma_1, \ldots \sigma_\mu \end{cases}$$

sieno due permutazioni dei medesimi $\mu + 1$ *numeri* (*scelti naturalmente fra* $1, 2, \ldots p$) *tutti fra loro diversi, e valore zero in ogni altro caso;* e propriamente valore $+1$ se le (37) appartengono alla medesima classe (hanno ambedue un numero pari o ambedue un numero dispari di trasposizioni) e valore -1, se esse appartengono a classi opposte.

La derivata di x'' [data da (34)] rispetto a $\alpha_k^{(h)}$ si compone della parte che risulta derivando la potenza di Δ, e della parte che risulta derivando A; ma la prima parte è sempre zero, pei valori iniziali, salvo nei casi in cui sia $h = k$. Onde si ha:

$$(38) \qquad \begin{aligned} X_{s_1 \ldots s_\mu} = \left(\frac{\partial x''_{s_1 \ldots s_\mu}}{\partial \alpha_k^{(h)}} \right)_0 &= 0 && \text{per } h \neq k \ , \ k \neq \text{da ogni } s \\ &= -x_{s_1 \ldots s_{\nu-1} h s_{\nu+1} \ldots s_\mu} && \text{per } h \neq k \ , \ k = s_\nu \\ &= \frac{\mu}{p} x_{s_1 \ldots s_\mu} && \text{per } h = k \neq \text{da ogni } s \\ &= \left(\frac{\mu}{p} - 1 \right) x_{s_1 \ldots s_\mu} && \text{per } h = k = s_\nu \end{aligned}$$

Le equazioni (25) ... (29) restano allora completate nel modo seguente [1]:

$$
(39)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} + \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1 \cdots s_{\mu-1}} \cdots \sum x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} p} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} i}} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots p-1) \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N} z_{hj} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} + \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1 \cdots s_{\mu-1}} \cdots \sum x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} h} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} i}} = 0 \\
\qquad\qquad (h \neq i \ ; \ h, i = 1, 2, \ldots p-1) \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} z_{hj} z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} - \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1 \cdots s_{\mu-1}} \cdots \sum x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} h} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} p}} = - P^{(h)} \frac{\partial J}{\partial P} \\
\qquad\qquad (h = 1, 2, \ldots p-1) \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N} z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} + \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1 \cdots s_{\mu-1}} \cdots \sum x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} i} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} i}} = (\lambda\omega - q) J \\
\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots p-1) \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} - \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1 \cdots s_{\mu-1}} \cdots \sum x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} p} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \cdots s_{\mu-1} p}} = q J
\end{cases}
$$

in cui i sommatorii rispetto alle s si intendono estesi: per la 1ª equazione a tutte le combinazioni a $\mu - 1$ dei numeri $1, 2, \ldots p-1$ escluso i; per la 2ª, a tutte le combinazioni a $\mu - 1$ dei numeri $1, 2, \ldots p$ esclusi i e h; per la 3ª, a tutte quelle dei numeri $1, 2, \ldots p-1$ escluso h; per la 4ª a tutte le combinazioni a $\mu - 1$ dei numeri $1, 2, \ldots p$ escluso i; e finalmente per la 5ª, a tutte quelle di $1, 2, \ldots p-1$. Così i detti sommatorii comprendono nelle tre prime equazioni $\binom{p-2}{\mu-1}$ termini, e nelle altre due $\binom{p-1}{\mu-1}$ termini.

2. I calcoli fatti e le formole trovate ci pongono in grado di ritrovare col nostro metodo le equazioni differenziali caratteristiche per un covariante qualunque che trovate prima da Brioschi (Ann. di Mat. (I), t. I, pag. 160), furono poi stabilite sotto la loro forma più generale (per il caso cioè in cui il covariante contenga tutte le variabili contragredienti di Clebsch) da Forsyth in Proc. Lond. Math. Soc., t. XIX, pag. 24-46 (1888).

Non vogliamo qui tralasciare di ritrovarle, sia per la loro affinità colle cose già dette e da dire, sia perchè ci sembra che il nostro modo di ritro-

[1] Osserviamo che poichè una x a più indici muta di segno scambiando fra loro due indici, così può scriversi sempre:

$$x_{s_1 \ldots h \ldots s_\mu} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \ldots h \ldots s_\mu}} = x_{s_1 \ldots s_\mu h} \frac{\partial J}{\partial x_{s_1 \ldots s_\mu h}}$$

vare e di rappresentare queste equazioni abbia dei vantaggi non trascurabili di simmetria e di semplicità, e sia infine perchè le dobbiamo porre in relazione colle equazioni già trovate per dedurne altre formole.

Consideriamo il covariante J dipendente dai coefficienti $a, b, \ldots$ delle forme date, e dalle serie delle variabili contragredienti di Clebsch, e cerchiamo, per seguire sempre il nostro uniforme punto di vista [1], una trasformazione dei coefficienti e delle variabili, la quale non sia quella che risulta direttamente dalla trasformazione lineare, cioè quella data dalle (6), (7), ma sia tale che rispetto ad essa J si comporti come un covariante assoluto.

È facile verificare che ciò accade colle x'' date da (34) e colle $a'', b'', \ldots$ date da:

$$a''_{r_1 \ldots r_p} = \Delta^{-\frac{n_1}{p}} a'_{r_1 \ldots r_p} = \Delta^{-\frac{n_1}{p}} a^{r_1}_{\alpha^{(1)}} \cdots a^{r_p}_{\alpha^{(p)}} \tag{40}$$

e formole analoghe per $b'', c'', \ldots$

La J costruita colle x'' e $a'', b'', \ldots$, cioè J'', sarà eguale alla J' moltiplicata per una potenza di Δ eguale a

$$\sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{\mu m_\mu}{p} - \sum_{s=1}^{p-1} \frac{n_s k_s}{p}$$

in cui m_μ sia l'ordine di J nelle variabili x a μ indici e k_s sia il suo grado nei coefficienti di f_s.

Ma per la nota formola che dà il peso q di J, la precedente formola non è che $-q$, onde $J'' = \Delta^{-q} J'$ e per la (11) si ha infine $J'' = J$. Possiamo allora costruire la *trasformazione infinitesima* che lascia invariata la J, osservando che i coefficienti del simbolo relativo sono le X date da (38), e le derivate delle a'' rispetto ad uno qualunque dei parametri $\alpha_k^{(h)}$, prese pei valori iniziali di questi, cioè

$$\begin{aligned} A_{r_1 \ldots r_p} = \left(\frac{\partial a''_{r_1 \ldots r_p}}{\partial \alpha_k^{(h)}} \right)_0 &= r_h \, a_{r_1, \ldots, r_h - 1, \ldots, r_k + 1, \ldots, r_p} \qquad \text{per } h \neq k \\ &= \left(r_h - \frac{n_1}{p} \right) a_{r_1 \ldots r_p} \qquad \text{per } h = k \end{aligned} \tag{41}$$

e analogamente per i B, C, ...

[1] Lo stesso metodo, oltrechè nella ricerca delle equazioni di Betti, è stato da noi applicato recentemente per le equazioni differenziali dei risultanti e discriminanti (Rend. Acc. Lincei, (5), t. XIII, 1904, 2° sem., pag. 295-301.

Si ottengono così le note equazioni:

$$(42)\quad \begin{cases} \sum_a \sum_r r_h\, a_{r_1 \dots r_{h-1}, \dots r_{k+1} \dots r_p} \dfrac{\partial J}{\partial a_{r_1 \dots r_p}} - \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_{\mu-1}} x_{s_1 \dots s_{\mu-1} h} \dfrac{\partial J}{\partial x_{s_1 \dots s_{\mu-1} k}} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (h \neq k) \\ \sum_a \sum_r r_h\, a_{r_1 \dots r_p} \dfrac{\partial J}{\partial a_{r_1 \dots r_p}} - \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_{\mu-1}} x_{s_1 \dots s_{\mu-1} h} \dfrac{\partial J}{\partial x_{s_1 \dots s_{\mu-1} h}} = qJ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (h = 1, 2, \dots p) \end{cases}$$

in cui $\sum_a$ sta a significare che bisogna fare la somma dei risultati ottenuti considerando prima i coefficienti a della prima forma, poi i b della seconda, ecc. e i sommatorii rispetto alle s devono essere estesi a tutte le combinazioni a $\mu - 1$ dei numeri $1, 2, \dots p$ esclusi h e k, per la prima equazione, ovvero escluso solamente h per la seconda.

3. Il modo col quale abbiamo ottenuto le precedenti equazioni ci permette di porle in relazione colle (39) e dedurne delle conseguenze.

Ognuna delle (42) è coordinata ad uno dei coefficienti $\alpha_k^{(h)}$, come anche accadeva di ognuna delle (39); ed è chiaro che da ciascuna delle (42) si deve poter dedurre la *corrispondente* delle (39).

Immaginando perciò J funzione, anzichè delle $a, b, \dots$, delle z_{ij} e di P, e indicando con Ω_{hk}, Ω_{hh} le operazioni rappresentate da:

$$(43)\quad \begin{cases} \Omega_{hk} = \sum_a \sum_r r_h\, a_{r_1 \dots r_h^{-1} \dots r_k^{+1} \dots r_p} \dfrac{\partial}{\partial a_{r_1 \dots r_p}} \\ \Omega_{hh} = \sum_a \sum_r r_h\, a_{r_1 \dots r_p} \dfrac{\partial}{\partial a_{r_1 \dots r_p}} \end{cases}$$

possiamo scrivere:

$$(44)\quad \sum\sum \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} \Omega_{hk} z_{ij} + \frac{\partial J}{\partial P} \Omega_{hk} P = \Omega J$$

e sostituendo tal valore in (42) e paragonando colla corrispondente (39), possiamo trovare il valore di $\Omega_{hk} z_{ij}$ per tutti i possibili valori di h, k. Ritroviamo così le relazioni differenziali cui soddisfanno le radici di un sistema di equazioni algebriche a più variabili considerate come funzioni dei coefficienti delle equazioni stesse.

Tali relazioni *per il caso speciale in cui le forme date sieno di ordini tutti eguali*, furono trovate da Betti (Ann. di Mat. (1), t. I, pp. 193-204; *Opere Matem.* t. I, 163-173) [1] come estensione di *alcune* delle formole

[1] È bene, ad evitare equivoci per lo studioso, notare un errore di stampa incorso nella Memoria di Betti, e riprodotto anche a pag. 164 delle *Opere Matem.* Nelle formole in cui il Betti fissa le operazioni che corrispondono alle nostre Ω, deve leggersi $t > u$ e non $t < u$.

date da Raabe e Brioschi per il caso di una sola equazione algebrica, e da esse il Betti prese il punto di partenza per ricercare quelle pei combinanti di cui abbiamo trattato nella Nota precedente, e che noi invece, più in generale, abbiamo ritrovato direttamente.

Si ha:

$$(45)\qquad \begin{cases} \Omega_{hk}\, z_{ij} = 0 & \text{per } k \neq i\,,\ k < p \\ \quad = -1 & \text{per } k = i\,,\ h = p \\ \quad = -z_{hj} & \text{per } k = i\,,\ h < p \\ \quad = z_{ij} & \text{per } h = k = p \\ \quad = z_{hj}\, z_{ij} & \text{per } h \neq k\,,\ k = p \end{cases}$$

e queste valgono anche per il caso in cui gli ordini delle $p-1$ forme sieno diversi fra loro.

4. Una ovvia estensione delle formole (39) si riferisce al caso in cui, anzichè essere assegnate solo $p-1$ forme fondamentali, ne sieno assegnate $\nu(p-1)$ divise in ν gruppi di $p-1$ ciascuno, e si abbia un covariante J che diviso per una potenza λ_1 di un invariante P_1 delle $p-1$ forme ottenute da quelle del primo gruppo, ponendovi $x_p = 0$, per una potenza λ_2 di un invariante P_2 delle $p-1$ forme ottenute da quelle del secondo gruppo ponendovi $x_p = 0$, ecc. sia funzione solo dei sistemi di soluzioni comuni dei ν sistemi di equazioni corrispondenti ai varii gruppi.

È evidente che allora, in luogo dei primi termini delle formole (39), ne verranno ν altri simili, ognuno corrispondente ad uno dei ν gruppi, e un analogo cangiamento subiranno i secondi membri della 3ª e 4ª delle (39).

Inoltre se supponiamo che oltre le $\nu(p-1)$ forme fondamentali rispetto alle quali il covariante J abbia la anzidetta proprietà, ve ne sieno delle altre che non facciano parte di alcuno dei ν gruppi, la modificazione che subiscono le (39), già estese secondo si è or ora detto, è che al primo membro bisogna aggiungere un Ω_{hk}J esteso a tutte le restanti forme.

5. E passiamo ora alla proprietà del sistema (39) già annunziata nella Nota precedente. I primi membri delle (42) soddisfanno alla notevole proprietà che essi formano un così detto *sistema completo*, cioè che indicandoli con V_{hk}J, la *parentesi* formata con due delle operazioni V è una combinazione lineare di tutte le V. Questa proprietà è ben nota [1] e risulta in modo semplice dallo stesso processo della dimostrazione, giacchè basta osservare che i primi membri delle (42), per il modo stesso con cui sono stati ricavati, sono i simboli delle trasformazioni infinitesime relative alla serie di trasformazioni (a parametri α) rappresentate dalle formole (34) e (40). Ora

[1] Per il caso binario v. Clebsch, *Bin. Form.*, pag. 310, e per il caso generale Forsyth, cit.

siccome queste formano un *gruppo*, così, per la nota teoria di Lie, le loro trasformazioni infinitesime soddisfanno alla indicata proprietà. Ma è evidente che lo stesso ragionamento potrà farsi per i primi membri delle (39), cioè delle equazioni di Betti estese, perchè le formole che dànno le x'' e quelle che dànno le z' formano anche evidentemente un gruppo. Onde abbiamo: *i primi membri* U_{hk} *delle equazioni di Betti estese e completate colle altre due categorie* (*oltre le tre già considerate da Betti*) *formano un sistema completo, cioè le parentesi formate con due delle operazioni da essi rappresentati, sono una combinazione lineare di tutte le* U.

Per fissare le idee, indichiamo con U_{hk} l'operazione rappresentata dal primo membro di quella fra le equazioni (39) che corrisponde al parametro $\alpha_k^{(h)}$ giusta il modo di deduzione che abbiamo tenuto; i primi membri di (39) saranno rispettivamente rappresentati da:

$$U_{pi} \ , \ U_{hi} \ , \ U_{hp} \ , \ U_{ii} \ , \ U_{pp} .$$

Possono allora facilmente verificarsi le seguenti formole (in cui gli indici possono avere tutti i valori, *compreso* p):

$$(46) \qquad \begin{cases} (U_{hi} \ , \ U_{kl}) = 0 & , \ \text{per } i \neq k \ , \ h \neq l \\ (U_{hi} \ , \ U_{il}) = U_{hl} & , \ \text{per } h \neq l \\ (U_{hi} \ , \ U_{kh}) = - U_{ki} & , \ \text{per } i \neq k \\ (U_{hi} \ , \ U_{ih}) = U_{hh} - U_{ii} . \end{cases}$$

Chimica. — *Le leggi fondamentali della stechiometria chimica, e la teoria atomica. Il discorso Faraday del prof. W. Ostwald.* Memoria del Corrispondente R. Nasini.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sulle formole che danno la deformazione di una sfera elastica isotropa.* Nota del prof. G. Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra.

La presente Nota è da considerarsi come un complemento alle due mie Note sullo stesso argomento pubblicate rispettivamente negli *Annali di Matematica* (tom. VI, ser. III, anno 1901) e nel *Nuovo Cimento* (tom. V, ser. V, anno 1903), nelle quali ritrovo le eleganti formole del prof. Almansi [1] sotto

[1] *Sulla deformazione della sfera elastica.* Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, ser. II, tom. XLVII.

una forma più evoluta e paragonabile alle note formole di risoluzione del *problema di Dirichlet* e di quello *derivato di Dirichlet* per una sfera o un campo indefinito limitato da una superficie sferica. Qui voglio fare una verifica diretta di quelle formole; e precisamente voglio dimostrare che *la continuità delle funzioni date ad arbitrio è sufficiente, perchè le formole trovate risolvano effettivamente ogni volta il problema proposto.*

In ciò che segue indicherò col simbolo (I) la prima delle due citate Note, col simbolo (II) la seconda, e mi varrò, senza aggiungere spiegazioni, delle notazioni in esse introdotte.

1. Le formole (2)′ della (I) servono a rappresentare un qualunque sistema di integrali delle equazioni (1) della (I) dell'equilibrio, ammesso che tali integrali siano finiti e continui insieme alle loro derivate dei due primi ordini in tutti i punti della sfera (i punti della superficie σ inclusi) e che si abbia sui punti di σ:

$$\xi = f_1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0;$$

sicchè in particolare per gli integrali $\xi = 1, \eta = 0, \zeta = 0$ si potrà scrivere:

$$1 = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma ,$$

$$0 = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \left\{ \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma ,$$

$$0 = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \left\{ \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma .$$

Ciò premesso, si considerino le formole (2)′ della (I) e, senza fare alcuna ipotesi circa al significato di ξ, η, ζ, supponiamo che *la funzione arbitraria f_1 sia finita e continua in tutto il campo di variabilità σ.*

Indicato con $f_1^{(0)}$ il valore della f_1 in un punto p_0 preso arbitrariamente su σ e con P_0 un punto qualsiasi interno alla sfera e situato sul raggio che passa per p_0, si può scrivere, in forza delle formole precedenti,

$$\xi(P_0) - f_1^{(0)} = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma ,$$

$$\eta(P_0) = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma ,$$

$$\zeta(P_0) = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma .$$

Dalla formola:

$$\lim_{\varrho = R} r^3 \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho = \lim_{\varrho = R} \frac{\varrho^t \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\dfrac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right)}{\dfrac{d}{d\varrho} \left(\dfrac{1}{r^3} \right)}$$

risulta facilmente che si può fissare una quantità finita e positiva A tale che si abbia, qualunque sia il punto p_0 e qualunque sia la distanza di P_0 da p_0,

$$(\alpha) \qquad \left| r^3 \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right| < A.$$

È chiaro poi che la quantità A si può fissarla in modo ancora che si abbia, indipendentemente da p_0 e dalla distanza di P_0 da p_0:

$$(\alpha)' \quad \left| r^3 \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right| < A\,, \quad \left| r^3 \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right| < A.$$

Descriviamo con centro in p_0 e con raggio uguale al segmento δ (δ pel momento indeterminato, ma non superiore ad R) una sfera; e indichiamo con σ_1 la porzione di σ interna a questa sfera, con σ_2 la porzione esterna. Evidentemente si può fissare una quantità finita e positiva B, indipendentemente dalla scelta del punto p_0, dalla distanza di P_0 da p_0, e da δ, tale che si abbia:

$$\frac{R+\varrho}{4\pi R}\int_{\sigma_2}\left|\frac{1}{r^3}+\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho\right| d\sigma < \frac{B}{\delta^2}\,,$$

$$\frac{R+\varrho}{4\pi R}\int_{\sigma_2}\left|\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho\right| d\sigma < \frac{B}{\delta^2}\,,$$

. . . . . .

Se si rammenta poi che si ha, qualunque sia δ e ovunque sia P_0,

$$\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_{\sigma_1}\frac{d\sigma}{r^3} \leq 1\,,$$

e se si indica con ϱ_1 una quantità fissata arbitrariamente, maggiore di *zero* e minore di R, avremo dalle (α), $(\alpha)'$ per $P_0 p_0 \leq R - \varrho_1$:

$$\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_{\sigma_1}\left|\frac{1}{r^3}+\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho\right| d\sigma < 1+\frac{kA}{2(2+k)\,\varrho_1^{t+1}} = A_1\,,$$

$$\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_{\sigma_1}\left|\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho\right| d\sigma < \frac{kA}{2(2+k)\,\varrho_1^{t+1}} < A_1\,,$$

. . . . . .

con A_1 quantità finita e positiva, che si può fissare indipendentemente dalla posizione di p_0 e dall'ampiezza di δ.

Ciò premesso, data una quantità positiva ε comunque piccola, in forza della continuità della funzione f_1 su σ, si può fissare il segmento δ, indipendentemente dalla posizione del punto p_0, in modo che si abbia ogni volta in tutti i punti della corrispondente regione σ_1:

$$|f_1 - f_1^{(0)}| \leq \frac{\varepsilon}{2A_1}\,;$$

ed in modo ancora che, indicando con M il massimo valore assoluto della funzione f_1, sia:

$$R - \frac{\varepsilon\delta^2}{4MB} > 0;$$

allora risulterà dalle precedenti formole per $P_0 p_0 \leq R - \varrho_1$:

$$|\xi(P_0) - f_1^{(0)}| \leq \frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\varepsilon}{2A_1} \int_{\sigma_1} \left| \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^{\varrho} \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right| d\sigma +$$

$$+ \frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R} \cdot 2M \int_{\sigma_2} \left| \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^{\varrho} \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right| d\sigma$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R-\varrho}{\delta^2} \cdot 2MB,$$

$$|\eta(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R-\varrho}{\delta^2} \cdot 2MB,$$

$$|\zeta(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R-\varrho}{\delta^2} \cdot 2MB;$$

per conseguenza, se indichiamo con ϱ_2 la più grande delle due quantità ϱ_1, $R - \frac{\varepsilon\delta^2}{4MB}$, risulterà per $P_0 p_0 \leq R - \varrho_2$:

$$|\xi(P_0) - f_1^{(0)}| < \varepsilon \quad , \quad |\eta(P_0)| < \varepsilon \quad , \quad |\zeta(P_0)| < \varepsilon,$$

qualunque sia il punto p_0 preso a considerare.

Da queste formole e dal fatto che la quantità ϱ_2 può essere fissata indipendentemente dalla posizione del punto p_0, risulta:

$$\lim_{Pp_0=0} \xi(P) = f_1^{(0)} \quad , \quad \lim_{Pp_0=0} \eta(P) = 0 \quad , \quad \lim_{Pp_0=0} \zeta(P) = 0,$$

qualunque sia la direzione e il modo secondo cui il punto P, interno alla sfera, si avvicina al punto p_0 di σ.

Se si osserva poi che le funzioni $\xi(P)$, $\eta(P)$, $\zeta(P)$ sono finite e continue insieme alle loro derivate dei due primi ordini in tutti i punti interni alla sfera (i punti di σ cioè al più esclusi) e che in questi punti soddisfanno alle equazioni (1) della (I) dell'equilibrio, avremo, appunto come si voleva dimostrare, che *la continuità della funzione f_1 è sufficiente, perchè le formole* (2)′, *della* (I) *valgano a rappresentare le componenti di una deformazione della sfera, corrispondente ai valori arbitrariamente dati f_1, 0, 0, di queste componenti nei punti di σ.*

2. Passiamo ora all'esame delle (2)″ della (I).

Le funzioni:

$$(\beta) \qquad \xi_1 = \frac{R}{\varrho} + \frac{kR(\varrho^2 - R^2)}{2(3+2k)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x^2} \quad , \quad \eta_1 = \frac{kR(\varrho^2 - R^2)}{2(3+2k)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x \, \partial y},$$

$$\zeta_1 = \frac{kR(\varrho^2 - R^2)}{2(3+2k)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x \, \partial z}$$

sono finite e continue insieme alle derivate dei due primi ordini in tutti i punti del campo indefinito limitato dalla superficie sferica σ (i punti di σ inclusi), nei punti di questo campo soddisfanno alle equazioni (1) della (I), e nei punti di σ divengono rispettivamente 1, 0, 0; esse quindi possono esprimersi mediante le formole (2)'' della (I).

Ciò premesso, si considerino le formole (2)'' della (I) e, senza fare alcuna ipotesi circa al significato di ξ, η, ζ, supponiamo che *la funzione arbitraria* f_1 *sia finita e continua in tutto il campo di variabilità* σ. Indicato con $f_1^{(0)}$ il valore di f_1 in un punto p_0 preso ad arbitrio su σ e con P_0 un punto qualsiasi esterno alla sfera e situato sul raggio che passa per p_0, si può scrivere, in forza di quanto si è osservato riguardo alle ξ_1, η_1, ζ_1:

$$\xi(P_0) - f_1^{(0)} = \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma + (\xi_1 - 1) f_1^{(0)},$$

$$\eta(P_0) = \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \times$$
$$\times \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma + \eta_1 f_1^{(0)},$$

$$\zeta(P_0) = \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \times$$
$$\times \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma + \zeta_1 f_1^{(0)}.$$

I primi termini ai secondi membri di queste formole sono espressioni perfettamente analoghe a quelle studiate nel § precedente; sicchè si può dimostrare anche qui che, data una quantità positiva ε' piccola ad arbitrio e presa per quantità ε del § precedente la quantità $\frac{\varepsilon'}{2}$, si può fissare, indipendentemente dalla scelta del punto p_0, un segmento ϱ_2 finito e maggiore di R, tale che si abbia per $P_0 p_0 \leq \varrho_2 - R$:

$$\left| \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon'}{2},$$

$$\left| \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon'}{2},$$

. . . . . .

Dalle formole (β) risulta poi che si può fissare una quantità finita e positiva C, in modo che si abbia, ovunque sia il punto P_0,

$$|\xi_1(P_0) - 1| < (\varrho - R)\,C \;,\; |\eta_1(P_0)| < (\varrho - R)\,C \;,\; |\zeta_1(P_0)| < (\varrho - R)\,C;$$

e per conseguenza, posto:

$$|f_1| \leq M \quad , \quad \varrho_2' = R + \frac{\varepsilon'}{2MC}$$

e indicata con ϱ_3 la minore delle due quantità fissate ϱ_2, ϱ_2', risulterà per $P_0 p_0 \leq \varrho_3 - R$:

$$|\xi(P_0) - f_1^{(0)}| < \varepsilon' \quad , \quad |\eta(P_0)| < \varepsilon' \quad , \quad |\zeta(P_0)| < \varepsilon',$$

qualunque sia il punto p_0 preso a considerare su σ. Dopo ciò, ragionando ancora come al § precedente e osservando che le funzioni ξ, η, ζ a distanza infinita si annullano come $\frac{1}{\varrho}$, risulta che *la continuità della funzione* f_1 *è sufficiente, perchè le* (2)″ *della* (I) *valgano a rappresentare le componenti di una deformazione dello spazio indefinito limitato dalla superficie* σ, *corrispondente ai valori arbitrariamente dati* f_1, 0, 0, *di queste componenti nei punti di* σ.

3. Consideriamo ora le formole (15)′ della (II), e, senza fare alcuna ipotesi sul significato di ξ, η, ζ, supponiamo che *la funzione data* F_x *sia finita e continua in tutti i punti della superficie* σ.

Intanto si può osservare che le ξ, η, ζ, date dalle (15)′ della (II), sono funzioni finite e continue dei punti della sfera limitata da σ (i punti di σ inclusi), le loro derivate dei primi tre ordini sono finite e continue in tutti i punti dell'interno di tale sfera (i punti di σ cioè al più esclusi) e soddisfanno alle equazioni (dell'equilibrio) (1) della (II); così basterà verificare se le tre componenti delle corrispondenti tensioni nei punti di σ coincidono rispettivamente con le funzioni arbitrariamente date $F_x, 0, 0$.

Secondo i calcoli della (II), per avere queste tre componenti, bisogna considerare le espressioni: $\frac{U}{R}$, $\frac{V}{R}$, $\frac{W}{R}$

della (II) e calcolare i limiti di queste espressioni quando dai punti dell'interno della sfera si va ai punti di σ.

Le formole (4)′, (12), (12)′ della (II) ci dànno:

$$\frac{U}{R} = \frac{\varphi_1}{R} - \frac{R^2-\varrho^2}{R\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_0^\rho \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\varrho_1^{\frac{2m+}{2}}d\varrho_1$$

$$= \frac{\varphi_1}{R} + \frac{R^2-\varrho^2}{R\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_0^\rho \left\{\frac{2m+3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)+\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right\}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}d\varrho_1$$

$$= \frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_\sigma F_x\left\{\frac{1}{r^3} + \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_0^\rho\left[\frac{2m+3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\lg\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)\varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}d\varrho_1\right\}d\sigma\,,$$

$$\frac{V}{R} = \frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_\sigma F_x\left\{\quad\frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_0^\rho\left[\frac{2m+3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\lg\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)\varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}d\varrho_1\right\}d\sigma\,,$$

$$\frac{W}{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Queste formole valgono anche a rappresentare un qualunque sistema di integrali delle equazioni $(1)_2$, $(2)_2$ della (II), ammesso che tali integrali siano finiti e continui insieme alle loro derivate dei due primi ordini in tutti i punti della sfera (i punti di σ inclusi); per conseguenza si avrà in particolare:

$$1 = \frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_\sigma \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_0^\varrho \left[\frac{2m+3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\lg\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)\varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}\, d\varrho_1 \right\} d\sigma ,$$

$$0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Arrivati a questo punto è facile comprendere che considerazioni perfettamente analoghe a quelle del § 1 valgono a dimostrare che, indicando con p_0 un punto qualsiasi di σ e con P un punto qualsiasi interno alla sfera, si ha:

$$\lim_{Pp_0=0}\frac{U(P)}{R} = F_\alpha(p_0) \quad , \quad \lim_{Pp_0=0}\frac{V(P)}{R} = 0 \quad , \quad \lim_{Pp_0=0}\frac{W(P)}{R} = 0 ,$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P si avvicina al punto p_0.

Adunque *la continuità della funzione* F_α *è sufficiente, perchè le formole* (15)′ *della* (II) *ci diano le componenti della deformazione di una sfera col centro fisso, sulla cui superficie* σ *agiscono le tensioni di componenti* F_α, 0, 0.

4. Ci rimane ora da considerare le formole $(15)_1'$ della (II). Per l'esame di queste formole, dopo di avere osservato che le componenti delle corrispondenti tensioni nei punti di σ sono date dai limiti delle espressioni:

$$\frac{U}{R} = \frac{\varrho^2-R^2}{4\pi R}\int_\sigma F_\alpha \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_\infty^\varrho \left[\frac{2m+3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\lg\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)\varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}\, d\varrho_1 \right\} d\sigma ,$$

$$\frac{V}{R} = \frac{\varrho^2-R^2}{4\pi R}\int_\sigma F_\alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\varrho^{-\frac{2m+3}{2}}\int_\infty^\varrho \left[\frac{2m+3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\lg\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2}\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right] \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)\varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}\, d\varrho_1 \right\} d\sigma ,$$

. . . . . ,

quando dai punti del mezzo indefinito limitato da σ si va ai punti di σ, e

che le funzioni:

$$U_1 = \frac{R}{\varrho} + \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x^2},$$

$$V_1 = \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x \partial y},$$

$$W_1 = \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x \partial z}$$

soddisfanno alle equazioni $(1)_2$ della (II) nei punti del mezzo indefinito limitato da σ e nei punti di σ divengono rispettivamente $1, 0, 0$ [1], basterà ripetere considerazioni analoghe a quelle del § 2. Adunque anche qui possiamo concludere che *la continuità della funzione* F_x *è sufficiente, perchè le formole* $(15)'_1$ *della* (II) *servano a rappresentare le componenti della deformazione del mezzo indefinito limitato da* σ, *quando nei punti di* σ *agiscono tensioni le cui componenti sono* $F_x, 0, 0$.

Matematica. — *Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio L. Bianchi.

In due Note pubblicate nei Rendiconti dei Lincei (2° sem. 1904) io ho studiato i gruppi (e in particolar modo i gruppi proiettivi) senza trasformazioni infinitesime, accennando alle loro possibili applicazioni alla teoria delle funzioni automorfe [2]. Ma ora si può chiedere: *esistono funzioni* F (automorfe) *uniformi di* n *variabili* $x_1 \dots x_n$, *trasformate in sè da un gruppo proiettivo* G, *contenente trasformazioni infinitesime*? È ben chiaro che sì: se p. es. con una trasformazione lineare sulle x passiamo a nuove variabili $y_1 \dots y_n$, una funzione F delle $y_1 \dots y_m (m < n)$ è trasformata in sè da tutte quelle proiettività (anche infinitesime), sulle x o sulle y, che trasformano soltanto le $y_{m+1} \dots y_n$. Questo caso ovvio *non è però il solo*: p. es. la funzione $\operatorname{sen}(x_1^2 - 2x_2)$ ammette proiettività infinitesime, senza potersi ridurre (con un cambiamento *proiettivo* di variabili) a dipendere da una variabile

[1] Mediante le funzioni U_1, V_1, W_1 si possono calcolare le componenti della deformazione, corrispondente alle tensioni di componenti $1, 0, 0$ nei punti di σ.

[2] Cfr. una mia Memoria di prossima pubblicazione negli « Annali di Matematica ». In questa Memoria sono specialmente studiati i gruppi G *propriamente* discontinui in n variabili x; soltanto in tal caso possono esistere n funzioni delle x, indipendenti tra loro, invariate per G (Cfr. i recenti lavori di Blumenthal nei Math. Annalen).

sola. *Ciò costituisce una prima differenza tra le funzioni automorfe generali e le funzioni più volte periodiche* (1). Per evitare ogni ambiguità, noi diremo semidiscontinuo ogni gruppo, che, pur contenendo trasformazioni infinitesime, possiede però soltanto un numero discreto (p. es. finito o numerabile) di trasformazioni (il Fricke lo direbbe discontinuo, con trasformazioni infinitesime). Sono però ben distinti l'ufficio e la natura, che le trasformazioni infinitesime hanno in un gruppo semidiscontinuo, dall'ufficio, che hanno le trasformazioni infinitesime di un gruppo continuo di Lie, che noi chiameremo trasformazioni infinitesime di Lie. La differenza sta in ciò, che le trasformazioni infinitesime di un gruppo semidiscontinuo non bastano per definire il gruppo, e non contengono parametri variabili con continuità.

Teorema I. — *Se una funzione* F *di n variabili* x *è trasformata in sè da un gruppo* G *proiettivo semidiscontinuo sulle* x, *essa ammette almeno una trasformazione infinitesima di Lie, e perciò ammette proprio un gruppo* Γ *proiettivo continuo di Lie.*

Il teorema reciproco è evidente.

Dimostrazione. — Se f è una funzione delle x, indicheremo con $f(\mathrm{A})$ il suo valore in un punto A [come sempre, le x si suppongono coordinate in uno spazio S]; con f'_i indicheremo la $\frac{\partial f}{\partial x_i}$; se $u_1, u_2 \dots u_r$ sono r funzioni delle x con $|\, u_1 u_2 \dots u_r ; \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_r \,|$ indicheremo quel determinante di r linee e colonne, in cui $u_i(\mathrm{A}_j)$ è l'*j-esimo* termine della *i-esima* linea $(i, j = 1, 2, \dots r)$. I punti A_j si immaginano naturalmente punti di S. L'annullarsi identico (cioè per qualunque posizione dei punti A) del precedente determinante è condizione necessaria e sufficiente, affinchè le u sieno legate da una relazione lineare a coefficienti costanti. Ora affinchè la F ammetta un gruppo proiettivo continuo, è condizione necessaria e sufficiente che esistano delle costanti a_i, a_{lk}, b_h $(i, l, k, h = 1, 2, \dots n)$ in guisa che sia identicamente

$$\sum_i a_i \mathrm{F}'_i + \sum_{l,k} a_{lk} x_l \mathrm{F}'_k + \sum_h b_h x_h \sum x_j \mathrm{F}'_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ossia che le $r = n(n+2)$ funzioni

$$\mathrm{F}'_i \;,\; x_l \mathrm{F}'_k \;,\; x_h \sum x_j \mathrm{F}'_j$$

sieno legate da una relazione a coefficienti costanti, ossia che si abbia identicamente $\Delta = 0$ (2) dove

$$\Delta = |\mathrm{F}'_i, x_l \mathrm{F}'_k, x_h \sum x_j \mathrm{F}'_j ; \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_r|$$

(1) È noto che una funzione uniforme di n variabili x, che ammetta un sistema infinitesimo di periodi, si può, con un cambiamento lineare di variabili, ridurre a dipendere da meno di n variabili: ciò del resto è immediata conseguenza del seguente teorema II, in cui al gruppo H si sostituisca il gruppo delle traslazioni.

(2) Se Δ fosse di caratteristica s, la F ammetterebbe $r - s$ trasformazioni linearmente indipendenti.

Se dunque la F non ammette un gruppo proiettivo continuo, sarà $\Delta \neq 0$, quando i punti A siano scelti in modo generico tra i punti di regolarità della F. Io dico che in tal caso la F non può ammettere un gruppo semidiscontinuo G. Sia infatti

$$(1) \qquad x'_i = \frac{\sum_k c_{ik} x_k + c_{i,n+1}}{\sum_k c_{n+1,k} x_k + c_{n+1,n+1}} \qquad (c_{ik} = \text{cost.})$$

una trasformazione T generica di G. Scriviamola sotto la forma $x'_i = x_i + \delta_i$ ponendo

$$\delta_i = \frac{\sum_k \lambda_{ik} x_k + \lambda_{i,n+1} - x_i \sum_k \lambda_{n+1,k} x_k}{\sum_k c_{n+1,k} x_k + c_{n+1,n+1}}$$

dove è

$$\lambda_{ik} = c_{ik} \quad (i \neq k) \qquad \lambda_{ii} = c_{ii} - c_{n+1,n+1}$$

Dovremo avere

$$(3) \qquad F(x_i + \delta_i) - F(x_i) = 0$$

Ora, se G è semidiscontinuo, potremo supporre infinitesima la T, ossia le δ_i piccole a piacere nei punti A. Ma allora la (3) si può scrivere per il punto A_j nel seguente modo:

$$(4) \qquad \sum_i \delta_i(A_j) \overline{F'_i}(A_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

dove con $\overline{F'_i}(A_j)$ indichiamo una quantità, che si può far differire di quanto poco si vuole dalla $F'_i(A_j)$, prendendo la T abbastanza prossima all'identità. Ora Δ è differente da zero, e tale rimarrà, se al posto delle $F'_i(A_j)$ poniamo delle quantità φ_{ij}, tali che le $|\varphi_{ij} - F'_i(A_j)|$ sieno minori di una certa costante ε. Scegliendo dunque la T in modo che $|\overline{F'_i}(A_j) - F'_i(A_j)| < \varepsilon$, il determinante $\overline{\Delta}$, che si ricava da Δ, ponendo $\overline{F'_i}(A_j)$ al posto di $F'_i(A_j)$, sarà ancora differente da zero. Ora la (4) per ciascuno degli r punti A si può scrivere:

$$\sum_i \left[\sum_k \lambda_{ik} x_k + \lambda_{i,n+1} \right] \overline{F'_i} - \sum_k \lambda_{n+1,k} \sum_i x_i \overline{F'_i} = 0$$

Otteniamo così r equazioni lineari omogenee tra le r costanti λ (che non sono tutte nulle, perchè T è differente dall'identità). Dovrebbe quindi essere nullo il determinante $\overline{\Delta}$ di queste equazioni, ciò che è assurdo.

Teorema II. — *Il precedente teorema vale per ogni gruppo* G *anche non proiettivo, purchè esso si possa immaginare contenuto in un gruppo continuo finito* H: *il gruppo* Γ *è in questo caso un sotto gruppo di* H. (Nel caso precedente il gruppo H sarebbe il gruppo generale proiettivo sulle n variabili x).

Sia infatti $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k \left(\text{dove } X_k = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ la più generale trasformazione infinitesima di H. Scritta una trasformazione generica T di G sotto la forma $x'_i = x_i + \delta_i$, varranno ancora le (3) e ancora le δ_i si potranno supporre infinitesime nei punti (A). Le (3) si possono quindi scrivere:

$$(4^{bis}) \qquad \sum_{k,i} \lambda_k \overline{\xi_{ki}}(A_j) \overline{F'_i}(A_j) = 0 \qquad (k, j = 1, 2, \ldots r) \ (i = 1, 2, \ldots n)$$

dove con $\overline{\xi_{ki}}(A_j)$, $\overline{F'_i}(A_j)$ indichiamo quantità, che differiscono dalle $\xi_{ki}(A_j)$, $F'_i(A_j)$ di quanto poco si vuole. Ponendo poi

$$\Delta = \left| \sum_i \xi_{1i} F'_i, \ldots, \sum \xi_{ri} F'_i ; A_1, A_2, \ldots A_r \right| ; \overline{\Delta} = \left| \sum_i \overline{\xi_{1i}} \overline{F'_i}, \ldots \sum \overline{\xi_{ri}} \overline{F'_i} ; A_1, A_2, \ldots, A_r \right|$$

le considerazioni precedenti si possono ripetere quasi letteralmente.

I nostri risultati si possono anche enunciare così:

Teorema III. — *Una funzione* $F(x_1 \ldots x_n)$ *uniforme nelle* x, *ammetta un gruppo* G *di trasformazioni in sè stessa; e sia* G *contenuto in un gruppo continuo finito* H *di Lie. Sono possibili questi soli tre casi:*

1° G *è un gruppo senza trasformazioni infinitesime.*

2° G *è un gruppo di Lie, continuo* (naturalmente intransitivo se $F \neq$ cost), *sottogruppo di* H.

3° G *è un gruppo che contiene un numero discreto di schiere di trasformazioni* (1). G *contiene cioè come sottogruppo un gruppo* Γ *continuo di Lie* (*sottogruppo anche di* H) *naturalmente intransitivo, se* $F \neq$ cost; *inoltre contiene altre trasformazioni* $T_1, T_2, T_3 \ldots\ldots$ *permutabili con* Γ *e inoltre le trasformazioni, prodotto di una* T *per una trasformazione di* Γ. *Questi prodotti si possono supporre tutti distinti; il prodotto di due trasformazioni* T *è uguale al prodotto di una terza* T *per una trasformazione di* Γ (2).

(1) Cfr. Lie-Engel, *Transformationgruppen*; 1er Abschnitt; pag. 310, 321 e seg.

(2) Il primo e il secondo caso si possono immaginare come casi particolari dell'ultimo, secondo che si suppone il gruppo Γ, o si suppongono le T ridotte all'identità. Nel caso generale siano $z_1 = \text{cost} \ldots z_m = \text{cost}$. ($m < n$) le minime varietà invarianti di Γ. Prendiamo come nuove variabili m funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ indipendenti delle z, insieme ad altre $n - m$ funzioni $\varphi_{m-1} \ldots \varphi_n$ (indipendenti tra loro e dalle prime) delle x. La F diventerà funzione delle sole $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. Nel caso particolare che H sia il gruppo proiettivo, si potrebbe chiedere se le $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ si possono sempre scegliere in modo tale, che le T generino su esse *un gruppo di trasformazioni lineari*. A questa importante, ma assai difficile questione, io ho potuto rispondere solo in casi particolari (Cfr. le pag. e la nota seg.). Sarebbe pure importante sapere se i teoremi I e II *continuano ancora a valere nel caso che* G *sia impropriamente discontinuo, pure non contenendo trasformazioni infinitesime, e nel caso che* H *sia il gruppo delle trasformazioni cremoniane* (*birazionali*): questioni tutte da lasciarsi a ulteriori ricerche.

Al primo di questi tre casi sono dedicati, tra l'altro, i miei lavori più sopra citati, in cui si troveranno pure altre indicazioni bibliografiche. Il secondo corrisponde allo studio dei sottogruppi intransitivi di un gruppo dato H, per cui ci basterà rimandare al citato trattato del Lie. Quanto al terzo caso, qui io mi occuperò soltanto delle funzioni di due variabili x_1, x_2 nel caso che il gruppo H sia il gruppo proiettivo: non riporterò però i calcoli relativi, del resto semplicissimi. Il gruppo Γ essendo intransitivo sarà generato da trasformazioni infinitesime aventi le stesse traiettorie; sia X una di queste trasformazioni (proiettive); con un cambiamento proiettivo di variabili coordinate, noi la potremo supporre ridotta a una delle seguenti forme:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \; x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}, \; \frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \; x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a\,x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \quad (a=\text{cost})$$

Nel primo caso la F non può dipendere che dalla solo x_2 ed è inutile più oltre occuparcene. Nel secondo la F sarà funzione di $z=x_2^2-2x_1$ e le T, dovendo trasformare la X o in sè stessa o in una trasformazione con le stesse traiettorie, saranno del tipo $x'_1=a^2x_1+abx_2+c$, $x'_2=ax_2+b$ (a, b, costanti); esse mutano z in $z'=a^2z+(b^2-c)$. La F diventa una funzione di $z=x_2^2-2x_1$, che ammette un gruppo di trasformazioni del tipo $z'=kz+h$ (k, h costanti) (1).

Nel terzo caso la F diventa funzione di $z=x_2e^{-x_1}$; e le T, come si riconosce tosto, inducono sulle z delle trasformazioni del tipo $z'=kz$ ($k=$ cost).

Nel quarto caso F diventa una funzione di $z=\frac{x_1^a}{x_2}$. Introducendo variabili omogenee y_1, y_2, y_3, si ha: $X=\sum\beta_i y_i\frac{\partial}{\partial y_i}(\beta_i=\text{cost})$, $\sum\beta_i=0$ (2).

Se $\beta_1\neq\beta_2\neq\beta_3\neq\beta_1$, le T sono (in coordinate non omogenee) del tipo $x'_1=hx_1$, $x'_2=kx_2$ (h, k costanti) e inducono sulla z delle trasformazioni del tipo $z'=az$ ($a=$ cost). Se invece $\beta_1=\beta_2\neq\beta_3$ la X si può supporre del tipo $x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$; la F diventa funzione di $z=\frac{x_1}{x_2}$ e le T sulla z inducono trasformazioni del tipo $z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (α, β, γ, δ costanti).

(1) Più generalmente nel caso di n variabili, se Γ si riduce al gruppo a un sol parametro generato dalla $\frac{\partial}{\partial x_1}+\sum_{i=1}^{n-1}x_i\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}$, allora la F diventa funzione delle

$$z_k=x_1{}^k-n[x_1{}^{k-2}x_2-(k-2)\,x_1{}^{k-3}x_3+(k-2)(k-3)\,x_1{}^{k-4}x_4-$$

$$-(k-2)(k-3)(k-4)\,x_1{}^{k-5}x_5+\cdots\pm\frac{\pi(k-2)}{1}x_1x_{k-1}\mp\pi(k-2)\,x_k](k=2,3\ldots n)$$

E su queste «$n-1$» funzioni le T non possono che operare linearmente (Cfr. Nota precedente).

(2) Cfr. Lie-Engel loc. cit. Cap. 27. Risultati analoghi per n qualunque.

In tutti i casi dunque, con un cambiamento (però *non sempre proiettivo*) di variabili, ci riduciamo a *funzioni automorfe di una sola variabile.*

L'estensione al caso di tre variabili non presenta difficoltà, e forse me ne occuperò in un'altra Nota; il caso di n variabili pare assai difficile, per la difficoltà, che presenta la ricerca di tutti i gruppi Γ proiettivi continui in n variabili.

Fisica matematica. — *Sulle funzioni potenziali elicoidali.* Nota di GIUSEPPE PICCIATI, presentata del Socio V. VOLTERRA.

Nello studio di potenziali che si sa essere dipendenti da due sole coordinate, e che quindi conservano valore costante lungo date linee, hanno particolare importanza, come ha dimostrato il prof. Volterra (1), le funzioni potenziali di masse ad una sola dimensione distribuite su queste linee. Tutti i varî tipi di potenziali binari reali sono stati determinati dal prof. T. Levi-Civita (2); essi si riducono ai seguenti: potenziali cilindrici o logaritmici, potenziali conici che rientrano nel tipo logaritmico, potenziali circolari o simmetrici, potenziali elicoidali, potenziali spirali. Per i due casi dei potenziali logaritmici o simmetrici sono note le corrispondenti funzioni potenziali di masse ad una dimensione distribuite sopra una retta indefinita o sopra una circonferenza (3). Degli altri casi ha importanza quello dei potenziali elicoidali, potendo interessare di conoscere la funzione potenziale di una massa ad una dimensione distribuita sopra un'elica indefinita; questa ricerca forma oggetto della presenta Nota. Si perviene ad assegnare per essa una espressione in serie distinta in due tipi valevoli, uno per i punti interni al cilindro su cui è tracciata l'elica, l'altro per i punti esterni. Ciò fa perfettamente riscontro a quello che si ha per i potenziali logaritmici. Infatti è noto che per la funzione potenziale di una massa distribuita con la densità lineare k sopra una retta indefinita parallela, per es., all'asse z, si ha

$$\varphi = -2k \log \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos v},$$

riferendoci a coordinate cilindriche ϱ, θ, z, ed avendo indicato con ϱ_1, θ_1 i valori corrispondenti alla retta data e posto $\theta - \theta_1 = v$. Distinguiamo ora i due casi seguenti:

(1) Annali della Scuola normale di Pisa, 1883: *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale.*

(2) Accademia delle Scienze di Torino, 1899: *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate.*

(3) Vedi Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Memorie del l'Acc. delle Scienze, Bologna, S. IV, T. II, 1881.

1°. $\varrho < \varrho_1$; si ha allora

$$\varphi = -k \log (\varrho_1 - \varrho e^{iv}) (\varrho_1 - \varrho e^{-iv}) = -2k \left\{ \log \varrho_1 - \sum_1^\infty{}^n \frac{1}{n} \frac{\varrho^n}{\varrho_1^n} \cos nv \right\} .$$

2°. $\varrho > \varrho_1$; si ha analogamente

$$\varphi = -2k \left\{ \log \varrho - \sum_1^\infty{}^n \frac{1}{n} \frac{\varrho_1^n}{\varrho^n} \cos nv \right\} .$$

Analoghi sviluppi si possono assegnare, come vedremo, per la funzione potenziale di un'elica indefinita. Come semplice applicazione determino in ultimo la funzione potenziale dell'elettricità indotta in un cilindro circolare indefinito, parallelo all'asse z, da eliche dello stesso parametro, aventi pure per asse l'asse z, interne al cilindro, supponendo le eliche uniformemente elettrizzate, ed il cilindro costituito di sostanza omogenea conduttrice ed in comunicazione con la terra.

1. Riferiamoci a coordinate elicoidali legate alle cartesiane ortogonali dalle relazioni

$$x = \varrho_1 \cos \varrho_3 \quad , \quad y = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 \quad , \quad z = \varrho_2 + m\varrho_3 . \quad (m > 0)$$

Senza danno della generalità possiamo prendere il parametro m uguale ad uno; il campo di variabilità delle ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 essendo allora per ϱ_1 da 0 a ∞, per ϱ_2 da 0 a 2π e per ϱ_3 da $-\infty$ a $+\infty$. Si consideri l'elica indefinita corrispondente ai valori $\varrho_1' = \mathrm{R}$, $\varrho_2' = 0$, e si immagini distribuita su di essa, nel tratto compreso fra i punti corrispondenti a $\varrho_3' = -\theta_1$, $\varrho_3' = \theta_2$, una massa con la densità lineare costante k, La funzione potenziale corrispondente è

$$(1) \qquad \varphi = k \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}}{r} d\varrho_3' = h \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\varrho_3'}{r}$$

con $h = k\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}$, ed avendo r, distanza del punto potenziato dai punti dell'elica, l'espressione

$$r = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos (\varrho_3 - \varrho_3') + (\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_3')^2} .$$

Il passaggio, senz'altro, al caso limite di un'elica indefinita non è possibile; si può invece superare la difficoltà in quest'altro modo. Supponendo ancora per un momento finito il tratto dell'elica, si considerino le derivate della φ rispetto a ϱ_1 e ϱ_2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} = -h \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\varrho_1 - \mathrm{R} \cos (\varrho_3 - \varrho_3')}{r^3} d\varrho_3'$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} = -h \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_3'}{r^3} d\varrho_3' .$$

Se ora passiamo al caso limite dell'elica indefinita, si riconosce che esse hanno un senso anche quando si estendono i limiti all'infinito, escludendo naturalmente per ϱ_1 e ϱ_2 i valori $\varrho_1 = \mathrm{R}$ $\varrho_3 = 0$, ed inoltre esse sono funzioni solo di ϱ_1 e ϱ_2. Infatti posto $\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_3' = \lambda$ si ha

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} = h \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\varrho_1 - \mathrm{R}\cos(\lambda - \varrho_2)}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3}\, d\lambda \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} = h \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3}\, d\lambda\,. \end{cases}$$

Ci si può quindi proporre la determinazione della funzione di ϱ_1, ϱ_2 le cui derivate prime coincidono con quelle della φ, la quale resulta così determinata a meno di una costante. Si osservi intanto che

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} = &- h\varrho_1 \left\{ \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3} + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3} \right\} \\ &+ h\mathrm{R} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda + \varrho_2)\, d\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3} + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda - \varrho_2)\, d\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3} \right\}, \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} = h \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\lambda\, d\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3} - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \frac{\lambda\, d\lambda}{\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2}\right)^3} \right\}, \end{aligned}$$

quindi si riconosce subito come $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1}$ sia funzione pari di ϱ_2, mentre $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2}$ è dispari; perciò φ, funzione pari, è, come funzione regolare di ϱ_2, sviluppabile in una serie di coseni. Avremo allora

$$(5)\qquad \varphi = a_0 + \sum_1^{\infty}{}_n\, a_n \cos n\varrho_2\,,$$

essendo le a, dipendenti da ϱ_1, determinate dall'equazioni che si ottengono ricordando che i potenziali binari elicoidali soddisfanno [1] all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} + \left(1 + \frac{1}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_2^2} = 0\,.$$

[1] Vedi Levi-Civita, Mem. cit.

Si ottengono per le a le equazioni

$$\frac{d^2a_0}{d\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_1}\frac{da_0}{d\varrho_1}=0\,,$$
$$\frac{d^2a_n}{d\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_1}\frac{da_n}{d\varrho_1^2}-\left(1+\frac{1}{\varrho_1^2}\right)n^2a_n=0\,,$$

delle quali la prima dà intanto $a_0=c_1\log\varrho_1+c_2$,
con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. La seconda, posto $\xi=in\varrho_1$, dà

$$\frac{d^2a_n}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{da_n}{d\xi}+\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)a_n=0\,,$$

della quale l'integrale è

$$a_n=p_n\,\mathrm{J}^n(\xi)+q_n\,\mathrm{Y}^n(\xi)\,,$$

essendo $\mathrm{J}^n(\xi)\,,\mathrm{Y}^n(\xi)$ le funzioni cilindriche di Bessel di 1ª e 2ª specie e $p_n\,,q_n$ costanti. L'espressione per φ viene perciò ad essere

$$(6)\qquad \varphi=c_2+c_1\log\varrho_1+\sum_1^\infty{}_n\{p_n\,\mathrm{J}^n(in\varrho_1)+q_n\,\mathrm{Y}^n(in\varrho_1)\}\cos n\varrho_2\,;$$

di essa restano ancora da determinare le costanti che vi figurano, ed a questo si può giungere nel seguente modo:

Si osservi che, posto $\mathrm{R}^2+\varrho_1^2+\lambda^2=\tau^2$, si ha sempre, purchè sia $\varrho_1\gtrless\mathrm{R}$ e qualunque sia ϱ_2, lo sviluppo

$$[\mathrm{R}^2+\varrho_1^2+\lambda^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda+\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=\sum_1^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\tau^{-\frac{3}{2}-n}2^n\cos^n(\lambda+\varrho_2)\,,$$

ed analogamente

$$[\mathrm{R}^2+\varrho_1^2+\lambda^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda-\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=\sum_0^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\tau^{-\frac{3}{2}-n}2^n\cos^n(\lambda-\varrho_2).$$

Ora essendo in generale

$$(2\cos\omega)^n=\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}\cos(n-2s)\,\omega\,,$$

avremo

$$[\tau^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda+\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}-[\tau^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda-\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=\sum_1^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\tau^{-\frac{3}{2}-n}\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}[\cos(n-2s)(\lambda+\varrho_2)-\cos(n-2s)(\lambda-\varrho_2)]$$
$$=-2\sum_1^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\tau^{-\frac{3}{2}-n}\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}\operatorname{sen}(n-2s)\lambda\cdot\operatorname{sen}(n-2s)\varrho_2\,;$$

quindi poichè

$$\sum_{s=0}^{s=2k}\binom{2k}{s}\operatorname{sen}2(k-s)\lambda\cdot\operatorname{sen}2(k-s)\varrho_2=2\sum_{s=0}^{s=k}\binom{2k}{s}\operatorname{sen}2(k-s)\lambda\cdot\operatorname{sen}2(k-s)\varrho_2$$

$$\sum_{s=0}^{s=2k+1}\binom{2k+1}{s}\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\lambda\cdot\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\varrho_2=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=k}\binom{2k+1}{s}\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\lambda\cdot\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\varrho_2$$

si ha infine

$$(7)\qquad [\tau^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda+\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}-[\tau^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda-\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=-4\sum_1^\infty{}_n\operatorname{sen}n\varrho_2\cdot\operatorname{sen}n\lambda\sum_0^\infty{}_s\binom{-\frac{3}{2}}{2s+n}(-1)^{2s+n}\binom{2s+n}{s}(\mathrm{R}\varrho_1)^{2s+n}\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n},$$

Uguagliamo le due espressioni per $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}$ che si hanno dalla (6) e dalla (4), e tenendo conto della precedente (7) otteniamo:

$$\sum_1^\infty{}_n\, n\{p_n\,\mathrm{J}^n(in\varrho_1)+q_n\,\mathrm{Y}^n(in\varrho_1)\}\operatorname{sen}n\varrho_2=$$

$$=4h\sum_1^\infty{}_n\operatorname{sen}n\varrho_2\sum_0^\infty{}_s(-1)^{2s+n}\binom{-\frac{3}{2}}{2s+n}\binom{2s+n}{s}(\mathrm{R}\varrho_1)^{2s+n}\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda\,.$$

Da questa si ricava

$$(8)\qquad n\{p_n\,\mathrm{J}^n(in\varrho_1)+q_n\,\mathrm{Y}^n(in\varrho_1)\}=$$

$$=4h\sum_0^\infty{}_s(-1)^{2s+n}\binom{-\frac{3}{2}}{2s+n}\binom{2s+n}{s}(\mathrm{R}\varrho_1)^{2s+n}\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda.$$

Ricordando che è in generale [1]

$$\operatorname{sen}x=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}(x)$$

abbiamo

$$\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}(n\lambda)\cdot\lambda^{\frac{1}{2}+1}\,d\lambda}{(\lambda^2+\mathrm{R}^2+\varrho_1^2)^{\frac{1}{2}+2s+n+1}},$$

quindi per una notevole formola di Sonin [2] otteniamo

$$\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\,\frac{\pi i(n)^{\frac{1}{2}+2s+n}\left(i\sqrt{\mathrm{R}^2+\varrho_1^2}\right)^{-2s-n}\mathrm{H}_1^{-2s-n}\left(in\sqrt{\mathrm{R}^2+\varrho_1^2}\right)}{2^{\frac{1}{2}+2s+n}\,\Gamma(\frac{3}{2}+2s+n)},$$

[1] Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen*, Leipzig, 1904, pag. 7.
[2] Vedi Nielsen, pag. 221.

nella quale formola le H_1^{-2s-n} indicano le funzioni cilindriche di terza specie o funzioni di Hankel. Ad essa poichè (1)

$$H_1^{-r} = e^{r\pi i} H_1^r = e^{r\pi i} \{J^r + i Y^r\}$$

si può dare l'altra forma più semplice

$$\int_0^\infty \tau^{-\frac{3}{2}-2s-n} \lambda \operatorname{sen} n\lambda \cdot d\lambda =$$

$$= \frac{\pi 2^{2s+n-1} \Gamma(2s+n+1)\,(n)^{2s+n+1}\, e^{(2s+n+1)\frac{\pi i}{2}}}{\Gamma(4s+2n+2)\left(\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right)^{2s+n}} H_1^{2s+n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right).$$

ed in conseguenza la (8) si può scrivere

$$(9) \qquad n\{p_n J^n(in\varrho_1) + q_n Y^n(in\varrho_1)\} =$$

$$= 4h\pi \sum_0^\infty{}^s \frac{1}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{2s+n+1} \left(\frac{R\varrho_1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}\right)^{2s+n} e^{(2s+n+1)\frac{\pi i}{2}} H_1^{2s+n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right).$$

Avendo sempre supposto $\varrho_1 \gtrless R$ è necessario ora considerare distintamente i due casi in cui è $\varrho_1 > R$ o $\varrho_1 < R$.

Si supponga dapprima $\varrho_1 < R$: allora anche per i punti dell'asse del cilindro su cui è tracciata l'elica, cioè per $\varrho_1 = 0$, resta $\frac{1}{r}$ finita insieme alle sue derivate, e così pure restano regolari la φ e le sue derivate. Dovremo quindi prendere le $q_n = 0$ onde escludere le funzioni cilindriche di 2ª specie che sono singolari in $\varrho_1 = 0$, e così pure dovremo fare $c_1 = 0$: la (9) ci dà allora

$$np_n J^n(in\varrho_1) =$$

$$= 4h\pi \sum_0^\infty{}^s \frac{1}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{2s+n+1} \left(\frac{R\varrho_1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}\right)^{2s+n} e^{(2s+n+1)\frac{\pi i}{2}} H_1^{2s+n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right).$$

Dividendo i due membri per ϱ_1^n e passando al limite per $\varrho_1 = 0$ otteniamo

$$np_n \cdot \lim_{\varrho_1=0}\left[\frac{J^n(in\varrho_1)}{\varrho_1^n}\right] = 4h\pi \frac{1}{\Gamma(1)\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} e^{(n+1)\frac{\pi i}{2}} H_1^n(inR)$$

e poichè

$$\lim_{\varrho_1=0}\left[\frac{J^n(in\varrho_1)}{\varrho_1^n}\right] = \frac{(in)^n}{2^n \Gamma(n+1)}$$

abbiamo finalmente

$$p_n = 2h\pi i H_1^n(inR)$$

onde l'espressione della φ viene ad essere

$$(10) \qquad \varphi = c_2 + 2h\pi \sum_1^\infty{}^n i H_1^n(inR) J^n(in\varrho_1) \cos n\varrho_2$$

valevole per $\varrho_1 < R$ qualunque sia ϱ_2.

(1) Vedi Nielsen, pag. 16.

Va osservato che la formola precedente è solo apparentemente complicata di immaginarî, giacchè per le espressioni di $J^n(in\varrho_1)$ e di $H_1^n(in\mathrm{R})$ si sa [1] che per n dispari sono i $J^n(in\varrho_1)$ ed $H_1^n(in\mathrm{R})$ reali, per n pari lo sono invece $J^n(in\varrho_1)$ ed $iH_1^n(in\mathrm{R})$. La (10) mostra per $\varrho_1 = 0$ che la costante c_2 non è altro che il valore costante della funzione potenziale dell'elica per i punti dell'asse del cilindro su cui essa è tracciata, cioè:

$$c_2 = h \int \frac{d\varrho_3'}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + (z - \varrho_3')^2}},$$

l'integrale essendo esteso fra limiti infiniti; esso coincide con il valore della funzione potenziale dell'asse z per i punti da lui distanti di R, onde si ha

$$c_2 = -2h \log \mathrm{R}.$$

Otteniamo quindi in conclusione, a meno di una costante,

$$(11) \qquad \varphi = -2h \left\{ \log \mathrm{R} - \pi \sum_1^\infty i\, H_1^n(in\mathrm{R})\, J^n(in\varrho_1) \cos n\varrho_2 \right\}.$$

Supponiamo ora $\varrho_1 > \mathrm{R}$; fissato ϱ_1 consideriamo R variabile, sempre però minore di ϱ_1; la funzione potenziale della corrispondente elica indefinita dovrà essere in R dello stesso tipo che in ϱ_1, data la sua simmetria in R e ϱ_1: dovrà essere regolare per $\mathrm{R} = 0$, coincidendo allora con la funzione potenziale dell'asse z; abbiamo quindi per essa l'espressione

$$(12) \qquad \varphi = -2h \left\{ \log \varrho_1 - \pi \sum_1^\infty i\, H_1^n(in\varrho_1)\, J^n(in\mathrm{R}) \cos n\varrho_2 \right\}.$$

Quando in luogo di considerare $m = 1$ si considerano eliche di parametro qualunque $m > 0$, e corrispondenti ad un valore qualunque ϱ_2' compreso fra 0 e $2\pi m$, i limiti inclusi, le formole a cui si arriva sono

$$(13) \quad \varphi = -\frac{2h}{m} \left\{ \log \mathrm{R} - \pi \sum_{1-n}^\infty i\, H_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right) J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \cos\frac{n(\varrho_2 - \varrho_2')}{m} \right\}, \text{ per } \varrho_1 < \mathrm{R}$$

$$(14) \quad \varphi = -\frac{2h}{m} \left\{ \log \varrho_1 - \pi \sum_{1-n}^\infty i\, H_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) J^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right) \cos\frac{n(\varrho_2 - \varrho_2')}{m} \right\}, \text{ per } \varrho_1 > \mathrm{R}$$

con $h = k\sqrt{\mathrm{R}^2 + m^2}$.

2. Si consideri un cilindro circolare di raggio R avente per asse l'asse z, indefinitamente esteso e costituito di sostanza omogenea conduttrice; internamente ad esso siano v eliche indefinite, di parametro m, su cui sia distribuita una massa elettrica ad una dimensione, di cui la densità lineare, costante per ogni elica, sia k_s. Facendo uso delle coordinate elicoidali, le eliche date corrispondano ai valori $\varrho_{1s} = \mathrm{R}_s$, $\varrho_{2s} = \alpha_s$; allora, indicando con φ_s la funzione potenziale di ogni elica, sarà $\mathrm{V} = \sum_1^v{}_s \varphi_s$ quella resultante, e per

[1] Vedi Nielsen, pag. 152.

i punti esterni a tutte le eliche avremo per la (14)

$$V = -\sum_1^{\nu}{}_s \frac{2k_s\sqrt{R_s^2+m^2}}{m}\left\{\log\varrho_1 - \pi\sum_1^{\infty}{}_n\, i\,H_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)J^n\left(\frac{inR_s}{m}\right)\cos\frac{n}{m}(\varrho_2-\alpha_s)\right\}.$$

All'elettricità indotta sulla superficie σ del cilindro corrisponde una funzione potenziale W, per la quale si dovrà avere nell'interno del cilindro $\Delta_2 W = 0$ e sopra σ, supponendo il cilindro in comunicazione con la terra, $W + V = 0$; all'esterno del cilindro è naturalmente $W + V = 0$. È assai facile determinare la funzione potenziale W dell'elettricità indotta anche per i punti interni al cilindro.

Si osservi intanto che per la proprietà caratteristica del potenziale inducente è W funzione solo di ϱ_1 e ϱ_2; come funzione potenziale di superficie è sempre finita e continua anche nel passare da una parte all'altra della superficie stessa. Quindi come funzione regolare di $\frac{\varrho_2}{m} = \theta$ essa è sviluppabile in serie di Fourier, ossia rappresentabile nella forma

$$W = a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\operatorname{sen} n\theta) = a_0 + \sum_1^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n}{m}\varrho_2 + b_n\operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2\right),$$

essendo le a funzioni di ϱ_1.

Dovendo soddisfare al $\Delta_2 W = 0$, che si riduce all'equazione dei potenziali elicoidali

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial W}{\partial\varrho_1} + \left(1+\frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varrho_2^2} = 0,$$

si deve avere, come si è visto precedentemente,

$$a_0 = c_1\log\varrho_1 + c_2,$$

$$a_n = p_n J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + q_n Y^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right),$$

$$b_n = p'_n J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + q'_n Y^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right),$$

con $c_1, c_2, p_n, p'_n, q_n, q'_n$ costanti.

Ma la sua regolarità anche per $\varrho_1 = 0$ esige che sia $c_1 = 0$, $q_n = 0$, $q'_n = 0$, onde si ha per W l'espressione

$$W = c_2 + \sum_1^{\infty}{}_n\left(p_n\cos\frac{n}{m}\varrho_2 + p'_n\operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2\right)J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right).$$

Restano a determinare le costanti c_2, p_n, p'_n; ma a questo si arriva subito tenendo conto della condizione in superficie. Si deve avere, infatti, per la (14) e per $\varrho_1 = R$,

$$(15)\qquad c_2 + \sum_1^{\infty}{}_n\left(p_n\cos\frac{n}{m}\varrho_2 + p'_n\operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2\right)J^n\left(\frac{inR}{m}\right) =$$

$$= \sum_1^{\nu}{}_s\frac{2k_s\sqrt{R_s^2+m^2}}{m}\left\{\log R - \pi\sum_1^{\infty}{}_n\, i\,H_1^n\left(\frac{inR}{m}\right)J^n\left(\frac{inR_s}{m}\right)\cos\frac{n}{m}(\varrho_2-\alpha_s)\right\},$$

da cui si ricava, eguagliando i coefficienti di $\cos\frac{n}{m}\varrho_2$, $\operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2$:

$$c_2 = 2\log \mathrm{R}\sum_1^{\nu}{}_s \frac{k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m},$$

$$p_n = -\frac{2\pi i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}{\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}\sum_1^{\nu}{}_s \frac{k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)\cos\frac{n}{m}\alpha_s;$$

$$p'_n = -\frac{2\pi i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}{\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}\sum_1^{\nu}{}_s \frac{k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)\operatorname{sen}\frac{n}{m}\alpha_s,$$

onde l'espressione di W per i punti interni al cilindro diviene

$$(16)\quad \mathrm{W} = \sum_1^{\nu}{}_s \frac{2k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\left\{\log \mathrm{R} - \pi\sum_1^{\infty}{}_n \frac{i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)}{\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}\mathrm{J}^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\cos\frac{n}{m}(\varrho_2-\alpha_s)\right\}.$$

Per i punti esterni al cilindro si ha invece

$$(17)\quad \mathrm{W} = -\mathrm{V} = \sum_1^{\nu} \frac{2k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\left\{\log\varrho_1 - \pi\sum_1^{\infty} i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)\cos\frac{n}{m}(\varrho_2-\alpha_s)\right\},$$

coincidendo naturalmente le due espressioni per $\varrho_1 = \mathrm{R}$.

Fisica. — *Intorno ad alcuni semplici strumenti per l'esatta verificazione dell'ora.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. Allorchè si determina l'istante del mezzogiorno vero locale o in generale quello del passaggio d'una stella al meridiano col metodo delle altezze corrispondenti e facendo uso del sestante, si può (come è noto e trovasi indicato nei trattati di Astronomia e di Navigazione) fissare gli specchi del sestante in una posizione conveniente e poi giunto il tempo opportuno, orientare ed inclinare il cannocchiale in modo che nel suo campo si trovino le due immagini della stella prodotte l'una per riflessione sugli specchi, l'altra sull'orizzonte artificiale (oppure la stella e l'orizzonte naturale) ed attendere che le due immagini coincidano e ripeter poi l'operazione quando la stella trovasi dall'altro lato del meridiano. Il contatto delle due immagini avviene quando l'altezza della stella sull'orizzonte è uguale all'angolo degli specchi (o al doppio di quest'angolo se ci si riferisce all'orizzonte naturale), e la media dell'ora esatta dei due contatti nel tempo dell'orologio dà l'ora esatta

nel tempo suddetto del passaggio della stella al meridiano; la differenza fra quest'ora e quella dedotta dagli annuarî astronomici dà l'errore delle indicazioni dell'orologio adoperato.

Operando in tal guisa, non solo si evitano gli errori nell'apprezzamento dell'angolo, ma sia la graduazione che le altre parti dello strumento, ad eccezione del cannocchiale e degli specchi, divengono inutili; quindi se lo strumento deve servire unicamente alla verificazione dell'ora, lo si può molto facilmente costruire fissando davanti ad un buon cannocchiale, in modo stabile e nella posizione conveniente, due specchietti rigorosamente piani e così le cure e la spesa che sarebbero necessarie per la costruzione e l'acquisto di un buon sestante possono essere o risparmiate o impiegate più utilmente nella parte ottica dello strumento.

2. Se i due specchietti sono fissati ben stabilmente e protetti in modo che la loro posizione relativa e rispetto all'obbiettivo del cannocchiale rimanga rigorosamente immutata per un tempo indefinito (ciò che non sarebbe possibile in un sestante senza rinunziare agli altri suoi usi e renderlo inutile come sestante), non è necessario ripetere spesso l'osservazione di entrambi i suddetti contatti delle immagini, il secondo dei quali avviene di solito ad un'ora molto incomoda, mentre il primo dopo un certo tempo avviene di giorno ed è inosservabile. Difatti, poichè per effetto del moto annuo del sole sulla sfera celeste l'istante di ciascuno dei suddetti contatti anticipa giornalmente, nel tempo medio, di 3 minuti e 55,9 secondi, la differenza fra questo anticipo e quello realmente osservato per mezzo dell'orologio dà la variazione giornaliera dell'errore dell'orologio o la somma di queste variazioni se fra le osservazioni di uno stesso contatto scorsero parecchi giorni.

Inoltre, determinato una volta accuratamente coll'osservazione di entrambi i contatti l'istante del passaggio al meridiano d'una stella secondo l'orologio e determinato così l'errore di questo, si potrà dedurre l'ora esatta corretta di ciascuno dei suddetti contatti nel giorno dell'osservazione e quindi ottenere quella dei giorni successivi o precedenti col togliere o aggiungere $3^m\ 55^s,9$ per giorno e solo ad intervalli molto più lunghi si potrà eseguire a scopo di verifica l'intera determinazione.

Anche nel modo seguente si può determinare l'ora esatta coll'osservazione d'un solo dei contatti delle immagini d'una stella qualsiasi e paragonarla con quella osservata sull'orologio, purchè la posizione degli specchi rimanga immutata.

3. Se si determina previamente ed accuratamente l'intervallo di tempo fra gl'istanti dei due contatti delle immagini d'una stella, servendosi d'un orologio di cui si conosca la variazione giornaliera dell'errore, se si corregge questo intervallo per l'effetto di tale variazione e lo si riduce prima in tempo siderale e poi in angolo, si avrà il doppio dell'angolo orario t della stella nell'istante di ciascun contatto e si potrà ricavare l'altezza h della stella

sull'orizzonte, ossia l'angolo degli specchi, mediante la solita formula:

$$\text{sen } h = \text{sen L sen } \delta + \cos \text{L} \cos \delta \cos t$$

dove L e δ sono la latitudine locale e la declinazione della stella.

Reciprocamente, noto h si potrà colla stessa formula ricavare t per una stella qualsiasi di cui sia nota la declinazione e calcolare quindi l'istante esatto in tempo medio nel quale deve avvenire il contatto delle due immagini. Se la posizione degli specchi rimane immutata, il valore di h determinato esattamente una volta varrà indefinitamente.

4. Un altro modo d'operare che richiede bensì l'osservazione di due contatti delle immagini, i quali però possono succedersi a breve intervallo e che inoltre non richiede nè la previa esatta determinazione di h, nè l'assoluta fissità della posizione degli specchi, altro che nel breve intervallo suddetto, consiste nell'osservare e determinare coll'orologio gl'istanti del contatto delle immagini di due stelle diverse scelte in modo che essi contatti si succedano a breve intervallo, che le due stelle si trovino ai due lati del meridiano e che di entrambe siano note l'ascensione retta e la declinazione. Fra i moltissimi casi di coppie di stelle che soddisfanno a queste condizioni citerò Vega ed Arturo che nella latitudine di Cagliari (39° 13′) raggiungono quasi contemporaneamente l'altezza di 60° sull'orizzonte, mentre la prima sorge e l'altra declina; così pure Altair ed Arturo raggiungono quasi contemporaneamente l'altezza di 45°; in entrambi i casi le due osservazioni devono succedersi immediatamente, e dopo eseguita la prima, basta appena il tempo per cambiar la posizione e l'orientazione del cannocchiale ed accingersi alla seconda.

Essendo δ e δ' le declinazioni delle due stelle, la suddetta relazione dà:

$$\text{sen } h = \text{sen L sen } \delta + \cos \text{L} \cos \delta \cos t = \text{sen L sen } \delta' + \cos \text{L} \cos \delta' \cos t'$$

dove h si può lasciare indeterminato e t e t' sono incognite per determinare le quali si ha inoltre:

$$\frac{t - t'}{15} + \text{A} - \text{A}' = \text{T} - \text{T}', \text{ ossia: } t - t' = \varepsilon$$

dove A ed A′ sono le ascensioni rette delle due stelle, T e T′ i tempi siderali dei due contatti e T — T′ l'intervallo di tempo fra i medesimi, osservato coll'orologio e ridotto in tempo siderale; esso a causa della sua brevità non richiede di solito correzione per la variazione dell'errore dell'orologio.

Da questa uguaglianza si ottiene: $\cos t \cos t' + \text{sen } t \text{ sen } t' = \cos \varepsilon$, e ponendo $\cos t = x$, $\cos t' = y$, $\cos \varepsilon = a$, si ricava: $x^2 + y^2 - 2axy + a^2 - 1 = 0$. Dalla prima equazione si ricava inoltre: $y = \text{M}x + \text{N}$, essendo $\text{M} = \text{tang L}(\text{sen } \delta - \text{sen } \delta') : \cos \delta'$, ed $\text{N} = \cos \delta : \cos \delta'$, e quindi sostituendo si ottiene:

$$x^2(1 + \text{M}^2 - 2a\text{M}) + x(2\text{MN} - 2a\text{N}) + \text{N}^2 + a^2 - 1 = 0.$$

Risolvendo questa equazione si ottengono due valori di segno contrario di $\cos t$, ossia due valori di t uno minore l'altro maggiore di 90°; è facile riconoscere quale convenga in ogni singolo caso sia dal suo segno, sia dall'ora dell'osservazione, sia dal valore di h che gli corrisponde.

Così p. es. il 16 agosto 1904, Altair raggiunse ad est del meridiano l'altezza di circa 45° a ore XX $2^m\,20^s$ dell'orologio (M. E. C.) ed Arturo raggiunse ad ovest l'altezza rigorosamente uguale alle XX$^h\,6^m\,20^s$. Era quindi $T - T' = 4^m\,0^s,65$ siderali, e siccome $A - A' = 5^h\,34^m\,51^s$ ne risulta: $t - t' = 84°\,42'\,54'',7$, e poichè $\delta = 8°\,37'\,13'',2$, $\delta' = 19°\,41'\,1'',4$ si ottiene:

$$1{,}90925\,x^2 - 0{,}31042\,x - 0{,}96527 = 0$$

donde: $x_1 = \cos t_1 = 0{,}79695$, e $t = 37°\,9'\,37'',5$ ossia $2^h\,28^m\,14^s$ di tempo medio (valore che concorda esattamente col semi intervallo di tempo fra gli istanti dei due contatti delle immagini di Altair in due lati del meridiano osservati direttamente). Ne risulta per l'istante del primo contatto in tempo medio dell'Europa centrale XX$^h\,2^m\,10^s$ e per la correzione dell'ora indicata dall'orologio -10^s concorde col valore ottenuto cogli altri metodi. L'altro valore di x ossia di $\cos t$ è $-0{,}63437$ corrispondente a $t_2 = 140°\,37'\,39''$ e ad $h = -23°\,1'\,22''$ cioè quando Altair era sotto l'orizzonte.

5. Finalmente se si applica il metodo delle altezze corrispondenti a stelle che passano molto vicine allo zenith e si dispongono gli specchi ad angolo poco minore di 90°, si può ridurre pressochè a zero l'intervallo di tempo fra le due osservazioni senza che perciò diminuisca l'esattezza colla quale si determina l'istante di ciascun contatto come diminuirebbe se si volesse diminuire il suddetto intervallo per stelle che passano lontano dallo zenith. Col sestante comune questo metodo non si potrebbe seguire fuorchè riferendosi all'orizzonte naturale e disponendo gli specchi a 45°, altrimenti occorre o modificare la disposizione degli specchi in modo facile ad immaginare, o adottare il semplice strumento che verrà descritto in seguito ed al quale precipuamente si riferisce ciò che segue.

L'esattezza con cui è possibile determinare l'istante del contatto delle due immagini dipende dalla durata di questo contatto, la quale è data dal quoziente del diametro delle immagini diviso per la velocità relativa colla quale esse si muovono; questa è uguale al prodotto dell'ingrandimento del cannocchiale per il doppio della velocità ($dh° : dt° = -\cos L \operatorname{sen} a$ essendo a l'azimut della stella) colla quale varia l'altezza. Il diametro delle immagini per effetto di diffrazione è uguale a $13'' : 2r$ se $2r$ è il diametro dell'obbiettivo, quindi la durata suddetta esprimendo h in secondi d'arco e t in secondi di tempo sarà:

$$\theta = 13'' : 15\ I \cos L \operatorname{sen} a = k : \operatorname{sen} a$$

se I è l'ingrandimento prodotto dal cannocchiale e k una costante per una data latitudine e un dato cannocchiale.

Questa durata e l'esattezza della determinazione per questo rispetto, sono inversamente proporzionali a sen a, sono massime per $a = 90°$ e decrescono prima lentamente poi sempre più rapidamente quando a decresce da 90° a 0°.

Dal solito triangolo sferico Polo-Zenith-Stella si ricava per questo azimut:

$$\text{sen } a = \cos \delta \text{ sen } t : \cos h$$
$$\text{cotg} a = \text{cotg} t \text{ sen L} - \text{tang} \delta \cos \text{L} : \text{sen } t$$

ed appare dalla prima di queste relazioni che sen a si può far crescere col far decrescere δ a partire da 90° fino a 0° e col far crescere t fino a 90°. È però chiaro anche senza ricorrere alle suddette relazioni, che sarà sempre $a < 90°$ sen $a < 1$ per le stelle che culminano a nord dello zenith (per le quali $\delta > \text{L}$) perchè esse non possono mai venire a trovarsi esattamente ad est od ovest dell'osservatore, ma si trovano sempre alquanto a nord. Dalle suddette relazioni si potrebbe ricavare il valor massimo possibile di sen a (per un dato valore di δ) ed i relativi valori di h e t. Così pure è chiaro che per le stelle la cui declinazione è di segno contrario della latitudine (nell'emisfero boreale per $\delta < 0$) è praticamente impossibile che durante ciascuna osservazione sia $a = 90°$ perchè in tal caso sen t è negativo, $t > 90°$ e la stella trovasi sotto l'orizzonte.

Ad eccezione di questi casi e quindi allorchè δ è compresa fra 0° ed L, è possibile e certamente vantaggioso che sia $a = 90°$ nel qual caso sen $a = 1$ cotg $a = 0$ e le suddette relazioni divengono:

$$\text{sen } t = \cos h : \cos \delta \qquad \cos t = \text{tang } \delta : \text{tang L}$$

Ciò posto sarà comodo per l'osservatore che t sia piccolo, ciò che si può ottenere scegliendo δ uguale o poco diverso da L (poichè il decremento di sen a al disotto di 1 sarebbe piccolo): il valore di t per una stella di cui sia noto δ si ricava dalla seconda relazione ed il corrispondente valore di h dalla prima.

L'intervallo $2t$ fra le due osservazioni diverrebbe nullo quando fosse $\delta = \text{L}$, $h = 90°$, tuttavia ciò non è rigorosamente e praticamente realizzabile, sia perchè occorrerebbero due strumenti uguali (o un doppio strumento) orientati in senso opposto per osservare i due contatti che avverrebbero simultaneamente, sia perchè usando l'orizzonte artificiale, lo strumento o lo specchio si farebbero ombra e l'immagine prodotta da esso orizzonte sarebbe occultata.

Nell'apparecchio sottodescritto se l è la lunghezza della proiezione dello specchio sull'asse ottico del cannocchiale e D la distanza dell'orizzonte artificiale, l'angolo h degli specchi dovrà differire d'un angolo $\varepsilon = l/2 \text{ D}$ da 90° perchè i raggi provenienti dalla stella e riflessi dall'orizzonte cadano liberamente sullo specchio relativo. Se fosse $l = 2$ cm., $2 \text{ D} = 2000$ cm. sarebbe $\varepsilon = 0{,}001$ e per $\text{L} = 45° = \delta$ s'avrebbe $2\Delta t = 2\varepsilon : \cos \delta = 0{,}002 : 0{,}7 =$

0,0029 = 10′ ossia l'intervallo di tempo fra i contatti sarebbe solo di 40 secondi. Se lo strumento fosse mobile facilmente e regolarmente attorno ad una verticale passante pel centro dell'orizzonte artificiale, dopo osservato un contatto si potrebbe rapidamente invertire l'orientazione da Est ad Ovest senza che le due immagini uscissero dal campo e senza che fosse quindi incerto, o fosse causa di perdita di tempo, il ritrovarle. Lo strumento formerebbe così una specie di strumento dei passaggi valevole solo per le stelle che passano vicino allo zenith ma che avrebbe il non piccolo vantaggio di non richiedere nè vista libera a Nord e Sud, nè una specola, nè una esatta orientazione previamente determinata, ma solo un'apertura in alto; inoltre l'orizzonte artificiale collocato a grande profondità sotto il cannocchiale sarebbe certamente sottratto all'azione del vento. Potrebbe altresì esser d'uso comodo un doppio strumento con due cannocchiali diretti l'uno ad Est l'altro ad Ovest con un unico oculare ad essi perpendicolare; così si eviterebbe il cambiamento di orientazione del cannocchiale; nel campo dell'oculare apparirebbero due coppie d'immagini avvicinantisi.

6. Un modo di collocare ed usare i due specchi il quale offre parecchi vantaggi per la facilità della costruzione, per la stabilità degli specchi, per la compattezza e simmetria dello strumento, per la comodità dell'uso e per l'estensione degli angoli misurabili, consiste nel collocare uno degli specchi dinanzi alla parte superiore dell'obbiettivo sul quale rifletta nella direzione dell'asse principale i raggi provenienti dalla stella e l'altro specchio sotto del primo, dinanzi alla parte inferiore dell'obbiettivo sul quale riflette i raggi della stella riflessi dall'orizzonte artificiale; è utile che i due specchi siano ben adiacenti in modo che la striscia intermedia non riflettente e quindi inutile sia minima.

Anche in questo caso come in quello del sestante, le immagini di due stelle (o di una stella e della sua immagine sull'orizzonte artificiale) coincideranno quando la distanza angolare delle stelle sia uguale al doppio dell'angolo degli specchi e il cannocchiale sia convenientemente diretto, e se i due specchi (o prismi rettangoli) fossero portati da alidade mobili su di un cerchio graduato ed attorno all'intersezione dei due specchi, lo strumento potrebbe servire alla misura degli angoli come il sestante ed i cerchi di Borda ed altri.

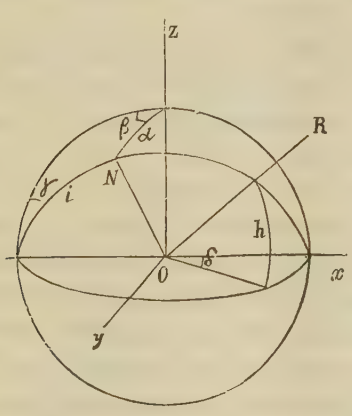
Per lo scopo attuale essendo importante l'immutabilità della posizione degli specchi, è opportuno usare come tali due faccie adiacenti di un prisma massiccio di vetro; si ha così l'inconveniente che quando convenga osservare con un diverso angolo occorre cambiar prisma o diedro ed avere tanti prismi o diedri quanti sono gli angoli coi quali si vuole osservare, ma d'altra parte si ha il vantaggio della assoluta costanza di ciascuno di questi angoli e della facile collocazione. Le immagini sono bensì un po' deboli, ma è tuttavia possibile, anche con cannocchiali di piccola apertura, di osservare le stelle di

3ª grandezza, mentre per quelle di 1ª grandezza tale indebolimento, sopprimendo i riflessi, rende le immagini più nette. A questo strumento si riferisce specialmente il metodo sopradescritto per le stelle che passano in vicinanza dello zenith.

Quando i due specchi sono affatto invariabilmente connessi fra loro e col cannocchiale, essi possono essere disposti comunque purchè inviino entrambi sull'obbiettivo i raggi riflessi dall'esterno; difatti, se si suppone invertita la direzione nella quale vanno i raggi, questi allorquando escono dall'obbiettivo parallelamente all'asse ottico del cannocchiale, dopo riflessi dai due specchi acquisteranno un determinato angolo di divergenza e reciprocamente due stelle (o una stella e la sua immagine sull'orizzonte artificiale) che abbiano una distanza angolare uguale a tale angolo produrranno nel campo del cannocchiale immagini coincidenti purchè questo sia convenientemente disposto; la necessaria orientazione, inclinazione e rotazione attorno all'asse ottico possono esser facilmente ottenute e ritrovate mediante mirini o cercatori collocati opportunamente.

7. Essendo data la posizione qualsiasi degli specchi, è utile poter calcolare la direzione e l'angolo dei due raggi che dopo essere riflessi rispettivamente da uno degli specchi divengono parallelli all'asse ottico del cannocchiale e producono una sola immagine, o ciò che è lo stesso la direzione e la distanza angolare dei centri dei due campi del cannocchiale.

Se si prendono come assi coordinati l'asse ottico Ox del cannocchiale, una orizzontale Oy ad esso perpendicolare ed una perpendicolare ad en-



trambi Oz, e se la perpendicolare ON ad uno degli specchi fa l'angolo α colla Oz e la sua proeizione sul piano xy fa l'angolo β con Ox, l'asse ottico farà con questa perpendicolare un angolo i che sarà l'angolo di riflessione del raggio, il piano d'incidenza sarà inclinato d'un angolo γ sul piano xz ed i e γ saranno dati dalle relazioni:

$$\cos i = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \qquad \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Inoltre la direzione del raggio incidente sarà data dall'angolo h che esso fa col piano xy e dall'angolo δ che la sua proiezione su xy fa coll'asse ottico Ox e sarà:

$$\text{sen } h = \text{sen } 2i \cos \gamma \qquad \text{tang } \delta = \text{tang } 2i \text{ sen } \gamma.$$

Le stesse formule possono servire per i raggi incidenti sull'altro specchio distinguendo con un apice sulle stesse lettere i nuovi angoli che corrispondono ai precedenti; l'angolo Δ dei due raggi sarà dato dalla relazione:

$$\cos \Delta = \cos h \cos h' \cos (\delta - \delta') - \text{sen } h \text{ sen } h'$$

Nel caso di un prisma le cui faccie formino un angolo A si ha inoltre la relazione:

$$\cos A = \cos \alpha \cos \alpha' + \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha' \cos (\beta - \beta').$$

8. La posizione del prisma rispetto al cannocchiale per varî rispetti più favorevole si ha quando lo spigolo o intersezione delle faccie riflettenti è perpendicolare all'asse ottico quindi $\beta = \beta' = o$. In questo caso il prisma può rotare attorno ad esso spigolo senza che l'angolo di divergenza dei campi varî, poichè ciascuno dei campi ruoterà nello stesso senso d'un angolo doppio di quello della rotazione del prisma. Se invece il prisma ruotasse attorno all'asse ottico del cannocchiale, i due campi ruoterebbero d'un ugual angolo nello stesso senso e l'angolo di divergenza rimarrebbe lo stesso, tuttavia perchè le immagini di stelle, la cui distanza angolare sia uguale alla divergenza dei campi, coincidano, occorrerà che coincidano i piani rispettivi d'incidenza ossia che lo spigolo del prisma sia perpendicolare al piano passante per le due stelle e lo strumento.

Così nel caso d'una stella e della sua immagine nell'orizzonte artificiale, perchè le due immagini prodotte dagli specchi possano coincidere, bisogna che lo spigolo sia esattamente orizzontale, ma una piccola deviazione dall'orizzontalità, uguale per es. ad ε $(= \beta - \beta')$, si riconosce facilmente perchè la congiungente le due immagini non è verticale e s'inclina sempre più a misura che esse s'avvicinano e passano ad una distanza orizzontale $(h + h')$ Iε l'una dall'altra, tanto maggiore quanto maggiore è la divergenza dei due campi, l'ingrandimento del cannocchiale e la deviazione suddetta. Si rimedia quindi molto facilmente a questa deviazione, facendo ruotare alquanto lo strumento attorno all'asse ottico, per es., mediante una delle viti di livello del sostegno, finchè le due immagini avvicinantisi appaiano e si mantengano sulla stessa verticale.

Finalmente, se il prisma ruotasse alquanto attorno alla perpendicolare allo spigolo ed all'asse ottico in modo che pur essendo soddisfatta la precedente condizione ed essendo quindi $\beta = \beta'$, questo angolo crescesse alquanto a partir da zero, h ed h' e quindi la divergenza dei due campi decrescerebbero ed il contatto delle suddette immagini avverrebbe per una minor altezza della stella sull'orizzonte. Tuttavia siccome per ipotesi e per costruzione β

e β' sono o piccolissimi o nulli, si ha $\cos i = \text{sen}\,\alpha$, $\cos i' = \text{sen}\,\alpha'$, $h = \pi - 2i$ $h = \pi - 2i'$, $\frac{d(h+h')}{d\beta} = -2\,(\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\alpha')\,\text{sen}\,\beta$. Quindi se α ed α' non sono molto vicini a 90° una piccola variazione di β produrrà una variazione notevolmente minore di $h + h'$. Così nel caso più sfavorevole che fosse $\alpha = \alpha' = 45°$, cioè A = 90°, se β variasse da 0° ad 1° (ciò che corrisponderebbe ad uno spostamente nello spigolo di 0,17 mm, per centimetro e non sarebbe ammissibile dal punto di vista tecnico) h varierebbe press'a poco di 1′ d'arco, ossia 4 secondi di tempo.

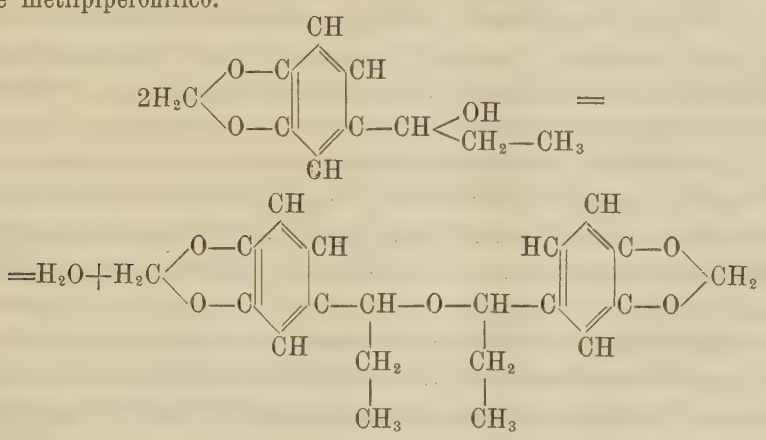
Si può quindi ammettere che l'angolo di divergenza dei campi prodotto dalle faccie riflettenti d'un prisma quando lo spigolo è perpendicolare all'asse ottico e le faccie sono press'a poco simmetriche rispetto ad esso, rimane praticamente costante per un dato prisma anche se questo viene occasionalmente tolto dal cannocchiale e poi rimesso, oppure se viene collocato, colle debite cure, dinanzi ad un altro cannocchiale.

In una prossima Nota descriverò alcuni particolari della costruzione di questo strumento ed alcune osservazioni fatte col medesimo.

Chimica. — *Sull'etere etilpiperonilico.* Nota di Efisio Mameli, presentata dal Socio E. Paternò [1].

Ho ottenuto quest'etere con lo stesso processo di formazione, che ho descritto per il suo omologo inferiore [2] e cioè per eterificazione spontanea dell'alcool secondario corrispondente.

L'alcool etilpiperonilico, che ho già descritto in una Memoria precedente, insieme ad alcuni suoi derivati [3], abbandonato a sè ancora impuro, va lentamente eterificandosi col meccanismo di azione, di cui parlai descrivendo l'etere metilpiperonilico.



[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Cagliari, novembre 1904.
[2] Rend. Accad. Lincei, 1904, *13*, I, 717. Gazz. chim. ital., 1904, *34*, II, 70.
[3] Rend. Accad. Lincei, 1904, *13*, II, 315. Gazz. chim. ital., 1904, *34*, II.

Che si ottenga veramente un corpo a funzione eterea viene dimostrato, oltre che dalla perfetta analogia di formazione che esso presenta con l'etere metilpiperonilico, dall'analogia di comportamento chimico, compresa l'inattività rispetto ai reattivi ordinari dell'ossigeno ossidrilico e carbonilico. Come il suo omologo inferiore, esso, per effetto del calore, si scinde nell'idrocarburo non saturo corrispondente — l'isosafrolo — e acqua

$$\begin{array}{l} CH_2.O_2.C_6H_3.CH.CH_2.CH_3 \\ \qquad\qquad | \\ \qquad\quad O \\ \qquad\qquad | \\ CH_2.O_2.C_6H_3.CH.CH_2.CH_3 \end{array} = H_2O + \begin{array}{l} CH_2.O_2.C_6H_3.CH:CH.CH_3 \\ \\ CH_2.O_2.C_6H_3.CH:CH.CH_3 \end{array}$$

Noterò che il punto di fusione dell'etere etilpiperonilico è più basso di quello del suo omologo inferiore. Questo fatto non è nuovo nel gruppo dei derivati del piperonal e ricorderò che esso si riscontra anche confrontando l'acetopiperone con il propiopiperone:

$CH_2.O_2.C_6H_3.CO.CH_3$
acetopiperone, p. f. 87°

$CH_2.O_2.C_6H_3.CO.CH_2.CH_3$
propiopiperone, p. f. 34°

$$\begin{array}{c} CH_2.O_2.C_6H_3.CH.O.CH.C_6H_3.O_2.CH_2 \\ \qquad\qquad\quad | \qquad\quad | \\ \qquad\qquad CH_3 \quad CH_3 \end{array}$$
etere metilpiperonilico, p. f. 111°

$$\begin{array}{c} CH_2.O_2.C_6H_3.CH.O.CH.C_6H_3.O_2.CH_2 \\ \qquad\qquad\quad | \qquad\quad | \\ \qquad\qquad C_2H_5 \quad C_2H_5 \end{array}$$
etere etilpiperonilico, p. f. 88°

Parte sperimentale.

L'alcool etilpiperonilico, fu ottenuto decomponendo con acqua e acido acetico il prodotto della reazione tra piperonal e ioduro di magnesio-etile in soluzione eterea (1). Dopo separazione dello strato acquoso, la soluzione eterea dell'alcool si purifica sbattendola a lungo con soluzione acquosa di bicarbonato sodico, onde allontanare l'eccesso di acido usato per la decomposizione del composto organo-magnesiaco, poi con soluzione concentrata di bisolfito sodico, che asporta il piperonal rimasto inalterato, indi nuovamente con bicarbonato sodico, per scacciare l'eccesso di anidride solforosa. Infine la si dissecca su cloruro di calcio e si scaccia il solvente a b. m. Il residuo oleoso così ottenuto trattiene oltre un poco di etere, anche delle tracce di sali inorganici e abbandonato liberamente a sè, va a mano a mano divenendo sempre più denso e meno scorrevole, nello stesso tempo che il colorito giallo diventa più intenso. Dopo quindici giorni circa, si notano, in seno al liquido, delle nubecole bianche tenuissime, che vanno crescendo di giorno in giorno e che finiscono per depositarsi al fondo del pallone, sotto forma di leggero strato

(1) L. cit.

gelatinoso bianco. Questo strato va acquistando aspetto cristallino e, dentro lo spazio di un mese, finisce per occupare quasi tutta la massa del liquido.

Filtrando alla pompa e lavando con etere, si ottiene una massa cristallina leggermente paglierina, omogenea, che, purificata per ripetute cristallizzazioni dalla benzina, o meglio dall'alcool, si presenta come una sostanza bianca, cristallizzata in piccoli prismi, fondenti a 88°.

Oltre che nei due solventi nominati, l'etere etilpiperonilico è solubilissimo in etere solforico e in ligroina, dai quali cristallizza con forme dendritiche, ed anche in cloroformio e in piridina, dalla quale l'acqua riprecipita la sostanza inal terata. È poco solubile nell'acido acetico ed è insolubile nell'acqua, negli idrati e nei carbonati alcalini.

La combustione della sostanza seccata nel vuoto, mi dette i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,2102: H_2O gr. 0,1238, CO_2 gr. 0,5393.

	Trovato °/°	Calcolato per $C_{20}H_{22}O_5$
C	69,97	70,14
H	6,58	6,48

Ho determinato il peso molecolare col metodo crioscopico, in soluzione benzenica ed ho ottenuto le seguenti cifre:

Solvente	Sostanza	C	Δ	P. M.
gr. 7,3349	0,0634	0,864	0°,142	298,15
	0,1157	1,577	0°,250	309,09
	0,2432	3,316	0°,500	324,97

Per $C_{20}H_{22}O_5$ si calcola P. M. = 339,60.

Il corpo ottenuto non riduce il nitrato d'argento ammoniacale e riduce debolmente il liquore di Fehling. Con il cloruro di benzoile e con la fenilidrazina non si combina. Con acido solforico concentrato, i cristalli dell'etere etilpiperonilico si colorano in rosso scuro, mentre il liquido assume un'intensa colorazione rosso-sangue, che, dopo qualche ora, si trasforma in violetto. L'acido nitrico concentrato scioglie l'etere in questione con reazione energica, sviluppando calore e dando luogo ad abbondanti vapori nitrosi. Trattando con acqua la miscela, precipita un nitroderivato, di cui non mi sono occupato per ora.

Riscaldando l'etere anche a pressione ridotta, esso si decompone. Sulle pareti fredde dell'apparecchio si depositano numerose gocce di acqua, mentre distilla un liquido che, all'odore, si riconosce subito per isosafrolo e che infatti fu identificato come tale, sia per il suo punto di ebollizione a temperatura ordinaria, 246-248°, sia per mezzo della formazione del picrato, ot-

tenuto dalla mescolanza delle soluzioni alcooliche dei componenti e che fonde a 73° (1).

Il meccanismo della decomposizione dell'etere etilpiperonilico per effetto del calore è identico a quello ammesso per il suo omologo inferiore e che ho illustrato quando descrissi questo corpo. In una prima fase, l'etere si scinde nell'alcool e nell'idrocarburo non saturo corrispondenti e cioè alcool etilpiperonilico e isosafrolo:

$$\begin{array}{c} CH_2.O_2.C_6H_3.CH.CH_2.CH_3 \\ | \\ O \\ | \\ CH_2.O_2.C_6H_3.CH.CH_2.CH_3 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} CH_2.O_2.C_6H_3.CH:CH.CH_2 \\ \\ OH \\ | \\ CH_2.O_2.C_6H_3.CH.CH_2.CH_3 \end{array}$$

Questa scissione era stata già osservata per altri eteri complessi, ma in questo caso la reazione non si arresta a questo punto, perchè l'alcool così formatosi, essendo instabile a temperatura elevata (2), si scinde a sua volta, dando un'altra molecola di idrocarburo e una molecola di acqua:

$$CH_2.O_2.C_6H_3.CHOH.CH_2.CH_3 = H_2O + CH_2.O_2.C_6H_3.CH:CH.CH_3$$

per cui i prodotti finali della reazione sono isosafrolo e acqua.

Questo processo di decomposizione, già interessante per sè stesso, concorre inoltre a dimostrare la costituzione dell'etere etilpiperonilico.

Geologia. — *Sulla stratigrafia del Vulcano Laziale.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata del Socio V. Cerruti.

Allorquando le numerose osservazioni fatte nella Campagna Romana mi condussero a concludere che le molteplici formazioni vulcaniche, malgrado l'aspetto tanto diverso col quale ci si presentano, potevano essere classificate stratigraficamente, scelsi due località una a nord di Roma, l'altra a sud perchè, studiate con molto dettaglio, servissero come sicura base di riferimento per le ulteriori ricerche la prima per la regione Sabatina, l'altra per la regione Laziale.

Tali studî di dettaglio, la cui pubblicazione rimonta ormai ad un decennio (3), mi permisero di stabilire definitivamente l'ordine col quale si

(1) Rend. Acc. Lincei, 1904; *13*, II, 184.

(2) Rend. Accad. Lincei, 1904, *13*, II, 319. Gazz. chim. ital., 1904, *34*, II,

(3) Clerici E., *Sopra un giacimento di diatomee al Monte del Finocchio o della Creta presso Tor di Valle*, Boll. Soc. Geol. It. vol. XII (1903), fasc. 4; *Notizie intorno ai tufi vulcanici della via Flaminia dalla valle del Vescovo a Prima Porta*, Rend. R. Accad. Lincei, cl. sc. fis. mat. e nat., 1° sem. fasc. 2°, 1894; *Considerazioni sopra i*

formarono taluni tipi di roccie. Tutte le osservazioni successive non hanno fatto che confermarlo.

Quanto all'area sulla quale s'erge il sistema vulcanico Laziale fin dal 1897 avevo verificato palmo a palmo sul terreno la serie stabilita (1), ed estese le conclusioni relative, in tutta la vasta zona che va da Valle Oscura, fra Mentana e S. Angelo Romano, a Decima e Castel Romano (2).

Successivamente ho compiuto, collo stesso dettaglio, lo studio di tutta la zona, che per brevità chiamerò littorale, la quale va dalla foce del Tevere ad Anzio. Dovendo ancora ritardare la pubblicazione di queste ricerche riassumo frattanto i principali risultati, ponendoli a confronto con analoghe osservazioni fatte nella zona settentrionale.

Rammento che la serie che avevo stabilita si compone dei seguenti elementi: *Tufo granulare*, *Pozzolana rossa*, *Conglomerato giallo*, *Pozzolana nera e tufo litoide*, *Conglomerato incoerente e formazione detta del Tavolato*.

Mostrai inoltre (3) che almeno quattro livelli distinti di sedimenti a diatomee possono alternarsi con gli elementi della detta serie.

Ciò premesso comincerò col dire che il tufo granulare si può seguire per lunghi tratti a Malpasso, Contumaci, Decima, Trigoria, Castel Romano, Monte di Leva, Petronella, Prattica di Mare, Pian di Frasso, nel fosso della Moletta vicino alla tenuta Buonriposo fin presso Carroceto, nel fosso di Tor S. Lorenzo, nei fossi di Cavallomorto. È un complesso di strati o banchi che dalla forma propriamente litoide vanno a quella propriamente granulare, con variazioni a pallottole pisolitiche, con variazioni terrose od argillose. Dapertutto è possibile trovare livelli ricchissimi di filliti, quasi sempre le stesse

---

tufi vulcanici a nord di Roma fra il fosso della Crescenza e quello della Torraccia, id. fasc. 7°; *Sulla origine dei tufi vulcanici al nord di Roma*, id. fasc. 8°; *Ancora sulla origine e sulla età dei tufi vulcanici a nord di Roma*, id., fasc. 12°.

(1) Non ignoro che già da altri autori era stato descritto l'ordine di successione dei tufi in una od in altra sezione o tentata anche la correlazione di più sezioni; ma una serie completa che fosse generalizzabile non era stata nè definita, nè preveduta; tanto vero che in pubblicazioni posteriori alle mie, e dalle quali erano da aspettarsi utili ammaestramenti, i rispettivi autori mostrano di non essersi capacitati della serie, oppure confondono ancora i più chiari membri della stessa. Devesi per altro a titolo di merito ricordare il colonnello Verri che nelle sue *Note per la storia del vulcano Laziale* (Boll. Soc. Geol. It., vol. XII [1903], fasc. 1 e 3), ha impostato esattamente il problema stratigrafico portandovi un largo contributo di importanti osservazioni, non da tutti giustamente apprezzate, e nelle *Osservazioni sulla successione delle roccie vulcaniche nella Campagna di Roma* (Boll. Soc. Geol. It., vol. XVII [1898], fasc. 1-2) ha riassunto la serie dei prodotti eruttati dal vulcano laziale.

(2) *Sopra i terreni di Decima presso Roma*, Boll. Soc. Geol. It., vol. XVI, (1897), fasc. 2.

(3) *Contribuzione alla conoscenza dei capisaldi per la geologia dei dintorni di Roma*, Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem., 1901, fasc. 3°.

specie: *Laurus nobilis* Lin., *Hedera helix* Lin., *Ilex aquifolium* Lin., *Taxus baccata* Lin., *Ruscus aculeatus* Lin., filliti che nelle stesse condizioni si trovano, nella zona settentrionale, a Valle Oscura, a Ferronea ed a Torre dei Sordi. Altre località pel tufo granulare sono Monte Sacro, Vigne Nuove, Portonaccio, Pratolungo, Castel Arcione, Inviolatella.

Gli affinamenti argillosi chiari, interposti a taluni banchi sono frequentemente diatomeiferi, così, per esempio, al Malpasso, nella valle della Selcetta (1), a Petronella, ai fossi di Cavallomorto. Lo stesso fatto si verifica anche a nord, per esempio, fra Marco Simone e Ferronea (2).

La pozzolana rossa si estende ovunque, con potenza molto diversa; a Tor de Cenci, Selcetta, Castel Romano, Mandriola, Schizzanello, Prattica, Campo Selva, Campo Jemini, dintorni di Ardea, Buonriposo, Vaccareccia, fossi di Cavallomorto, Conca. A nord sono ben noti i giacimenti di Salone, Lunghezza, quelli numerosi ai lati della via Tiburtina; a Casal de' Pazzi, Marco Simone, Mentana, Pratolungo, dintorni di Ponte Lungo della Foce, S. Vittorino, Ponte Terra.

Il conglomerato giallo ricopre la pozzolana rossa, con spessori molto variabili. Grande sviluppo ha nei pressi della Mandriola, ove la strada, in trincea, mostra una delle più chiare sezioni illustranti parte della serie, dalla pozzolana rossa, che è nel fosso sotto il ponte, alle pozzolane ricoprenti il tufo litoide e, discendendo il fosso, si può raggiungere anche il tufo granulare. Il conglomerato giallo è reperibile, per indicare soltanto località estreme, a Malpasso, Carroceto, Cavallomorto. È pure visibile, colla potenza di tre a quattro metri, dentro il fosso dell' Incastro a poco più di un chilometro da Ardea. Affinandosi diviene talvolta diatomeifero, così pel fosso del Diavolo, a circa 3 km. da Tor S. Lorenzo, ove abbondano pure resti di *Elephas antiquus*, *Bos*, *Rhinoceros*.

A nord il conglomerato giallo può ravvisarsi sulla via Tiburtina presso ponte Mammolo, a Sette Camini; a Ponte Lungo della Foce.

Le pozzolane nere o bigie con scorie nere ed il tipico tufo litoide sono ancora più facilmente reperibili, non essendo necessario che il terreno sia profondamente solcato da vallate per vederli. Nella zona littorale prevalgono alle Vittorie, a Pescarella, ad Ardea, a Vallelata.

Nell'abitato di Ardea il tufo litoide sostiene un'argilla a diatomee di acqua dolce, lo stesso avviene al Trafusino e verso Malafede (3). Alla estre-

(1) Presso il fontanile della Selcetta è visibile per buon tratto una corrente di leucitite non ancora indicata sulle carte geologiche, nè menzionata da altri.

(2) Altri notevoli giacimenti diatomeiferi ho trovato a Procoio vecchio sulla via Flaminia, nelle vicinanze di Riano, a Torre Redicicoli, alla cantoniera di Casa Cotta presso Passo Corese, a Mentana.

(3) Sono pure da ricordarsi, pei confronti, i giacimenti diatomeiferi della Sedia del Diavolo, di Casale Mangani presso Vigne Nuove, di Pietralata e di Ponte Mammolo.

mità della collinetta di Campo Jemini vi è invece un materiale tripolaceo con diatomee salmastre, giacimento unico nel genere in tutta la zona littorale.

Posteriore al tufo litoide, ma talvolta connessa al medesimo, è la pozzolana bigia o rossastra con scorie rossastre la cui potenza sembra aumentare avvicinandosi al gruppo dei crateri.

Risalendo le trincee della via ferrata di Marino, si constata agevolmente che il peperino, tanto della forma chiamata ceneri, ricca di proietti calcarei e di brani di argilla pliocenica, quanto la forma litoide o peperino propriamente detto, è posteriore alla anzidetta pozzolana. Ciò è dato di constatare anche lungo la strada Frattocchie-Cecchina, nonchè a Casale Abbruciato fra la Falcognana e Paglian Casale.

Un lembo di tale formazione potrebbe ravvisarsi anche a S. Procula ove contiene numerose impronte vegetali al contatto con la sotto giacente marna a molluschi continentali e incrostazioni travertinose.

Per brevità ho accennato soltanto ad alcuni dei molti giacimenti diatomeiferi, de' quali parlerò a suo tempo. Avvicinandosi al gruppo dei crateri diminuisce la loro frequenza e la loro entità. Si notano qualche volta forme d'affinamento che, sebbene sprovviste di diatomee, possono ancora collegarsi od equipararsi per la loro origine a quei materiali che ne contengono; in altri casi rappresentano il suolo vegetale negli intervalli di quiete del vulcano.

Nella zona littorale, oltre agli accennati materiali diatomeiferi, ai membri superiori della serie si frappongono delle sabbie ricche di augite che, in gran parte, possono considerarsi di formazione eolica in vicinanza del mare.

Le notizie brevemente riassunte in questa Nota valgono in modo speciale per tutta la parte ad ovest di una retta tirata da Nettuno a Palombara Sabina; valgono pure per la parte ad est quantunque non interamente studiata in dettaglio.

Nella insellatura della falda laziale coi monti Prenestini le più basse quote del terreno sono già tanto elevate e le valli non bastantemente profonde per mostrare, con la desiderata frequenza, i membri più bassi della serie. Nondimeno ciò è possibile da Palestrina a Cave ove i tufi più antichi sono ricchi di resti vegetali (1). Ma se talvolta si raggiunge taluno dei membri più bassi della serie non è possibile vedere al disotto i terreni pliocenici o perchè asportati prima delle eruzioni o perchè giacenti a quote notevolmente più basse che non nella parte occidentale.

In questa parte terreni pliocenici a fossili macroscopici si trovano a Monterotondo (2), a Mentana e Valle Oscura, intorno ai Cornicolani, a Torre

(1) Abbondanti resti vegetali ho raccolto nei tufi di S. Gregorio da Sassola e Casape.

(2) Incontro, alla destra del Tevere, al bivio della via Tiberina per Riano.

Lupara, a Ferronea: nella zona littorale fra Prattica e Campo Selva, località affatto nuova (1) e poi a Tor Caldara ed Anzio.

Più spesso il tufo granulare si vede riposare su sabbioni quarzosi giallastri direttamente o con intercalazioni argillose a *Cardium Lamarcki* e poche altre specie, come per esempio a Trigoria e al fontanile presso la diruta Mola di Castel Romano, che certamente sono più recenti delle argille delle località poc'anzi indicate.

Non mancano località ove il tufo granulare riposa su sedimenti d'acqua dolce. Sono già noti quelli di Ponte Nomentano, del fosso della Cecchina, dell'interno di Roma, delle Tre Fontane, della via Ostiense, di Capo di Bove, ecc.

Al Malpasso, nello scavo d'un tombino per la nuova strada rinvenni argilla diatomeifera con *Castor fiber* Lin. ed abbondanza di *Planorbis corneus* Lin., *Bythinia tentaculata* Lin., *Limnaea palustris* Müll., ecc.

Difficilmente in una ristretta località può vedersi completa tutta la serie; però non è difficile di connettere sul terreno le sezioni naturali o artificiali che ne mostrino una parte, e di completarle a vicenda.

La mancanza di uno o più elementi della serie in qualche località deve essere attribuita per solito alla erosione e non può costituire obbiezione contro la reale esistenza della serie stessa.

Zoologia. — *Ricerche sulla riproduzione dei Flagellati* (2). II. *Processo di divisione delle Triconinfe*. Nota preliminare della dott. Anna Foà, presentata dal Socio Grassi.

In una precedente Nota preliminare il prof. Grassi ed io abbiamo esposto i risultati a cui eravamo pervenuti nello studio del processo di divisione delle Joenie.

Durante le vacanze estive, nell'assenza del prof. Grassi, assorto in altre occupazioni, ho continuato il lavoro da me sola ed ho potuto seguire il processo di divisione di altra forma affine di Flagellati.

Comunico brevemente i risultati finora ottenuti.

La forma di cui mi sono occupata è la *Trichonympha agilis* Leidy, parassita dell'intestino del *Termes lucifugus*.

Debbo subito notare che, come si è verificato per le Joenie, anche nelle

(1) Le stesse argille giallastre si ritrovano pure sul fianco della collina di Campo Ascolano presso Prattica. Argilla azzurra a globigerine, di tipo vaticano, si vede sotto il ponte del fosso della Vaccareccia.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

Triconinfe sotto uno stesso nome si comprendono in realtà due forme nettamente distinte, che per ora denomino rispettivamente forma maggiore e forma minore.

La *Trichonympha agilis*, forma maggiore, è quella minutamente descritta dal prof. Grassi nel 1889, nella opera sua e del dott. Sandias: *Costituzione e sviluppo della Società dei Termitidi* (1), sì che io mi limito a precisare alcuni particolari lasciati allora indeterminati.

Mantenendo il paragone fatto dal Grassi tra l'estremità anteriore del corpo del Flagellato ed una bottiglia, aggiungerò che nei preparati coloriti coll'ematossilina ferrica di Heidenhain, il canalicolo costituente il lume del collo della bottiglia si colora in nero, come pure si colorano in nero due granuli alla base del canalicolo stesso, al disopra del protoplasma granuloso. A volte invece di due granuli soli se ne colorano parecchi, e si colora pure un altro corpicciuolo situato nella parte superiore del canalicolo, nella posizione che occuperebbe il turacciolo della bottiglia.

A volte si colorano solamente i granuli ed il canalicolo no.

Trattando una *Triconinfa* con una soluzione di acido acetico piuttosto concentrata, tutta la parte corrispondente alle pareti del collo della bottiglia si dilata enormemente fino ad assumere la stessa larghezza del corpo del Flagellato. La sostanza che riempie il collo della bottiglia, col suo corpicciuolo terminale, resta però intatta, aderente al protoplasma granuloso sottostante.

Il significato da darsi a queste parti è molto incerto. Di questi granuli non vedo più traccia durante la divisione.

Come disse il Grassi, il nucleo è sostenuto da una specie di cestello. Questo cestello però non è isolato in mezzo protoplasma, i filamenti che lo compongono, filamenti jalini pieghevoli, non elastici, si attaccano con un estremo tutt'intorno alla base della bottiglia, ad intervalli uguali, molto regolarmente, sì che viene a costituirsi una sorta di fondo della bottiglia stessa.

Tutto questo apparato di sostegno del nucleo può essere paragonato al collare delle Joenie.

La striatura longitudinale delle Triconinfe è data da solchi in cui si inseriscono i flagelli.

Tali solchi si vedono specialmente bene durante la divisione, perchè il corpo del Flagellato si rigonfia ed i solchi appariscono più evidenti.

La zona di ectoplasma omogeneo che si trova al disotto dei flagelli presenta una striatura finissima, che deve essere ulteriormente studiata, perpendicolare alla superficie libera.

(1) Sull'argomento è ritornato nel 1897 il Porter senza tener conto di quanto aveva osservato il Grassi, ma di ciò nel lavoro in esteso.

Non ho finora trovato nulla che possa interpretarsi come micronucleo, nè come zona cromidiale, o cromidî.

L'altra forma di *Trichonympha*, che denomino forma minore, differisce poco dalla precedente; le differenze però sono ben determinate. Se ne distingue principalmente per la forma tondeggiante, per le dimensioni in complesso minori, e perchè la zona striata è molto più corta sì che il cestello ed il nucleo si trovano in avanti.

Già il Grassi aveva notato in alcuni individui questa differenza senza attribuirle un'importanza speciale, ma che si tratti di forme aventi un significato diverso è confermato dal fatto che nella forma minore e nella forma maggiore il processo di divisione non avviene nella stessa maniera. Forse questa circostanza è dipendente in parte da ciò, che, relativamente alla quantità di protoplasma, il nucleo della forma minore è considerevolmente più piccolo di quello della forma maggiore.

Un'altra differenza assai piccola ma pure costante, è la seguente; nella forma minore al di sotto del nucleo si vedono le estremità libere dei fili che compongono il cestello, mentre questi estremi non si vedono nella forma maggiore.

Divisione della forma minore.

Al principio del processo di divisione, il cestello di sostegno del nucleo si decompone, vale a dire i filamenti che per un estremo erano intrecciati o riuniti, si separano gli uni dagli altri e si vedono, a così dire, pendenti nel protoplasma, sempre restando attaccati coll'altro estremo alla base della bottiglia. Il nucleo allora sale in alto, non so bene per quale processo e viene a trovarsi in fondo al collo della bottiglia.

Il tubolo, il collo e la zona flagellata si dividono ben presto in due parti, che a me sembrano eguali. Le due metà si allontanano l'una dall'altra; e tra l'uno e l'altro tratto della zona striata viene a trovarsi una parte di protoplasma, naturalmente senza flagelli, che le tiene separate.

Tutto il Flagellato in tal modo viene ad assumere una forma subtondeggiante.

Appena le due metà del tubolo, costituente il collo della bottiglia, cominciano ad allontanarsi, tra l'una e l'altra si vede comparire un fuso acromatico, i cui estremi sono nella posizione occupata dai granuli, di cui sopra, nell'individuo in riposo; di tali granuli però non mi riuscì di vedere più traccia.

Questo fuso, a fibre continue, omologo a quello della Joenia (fuso esterno) si trova al di fuori della membrana nucleare, non so se in un infossamento come nella Joenia (fig. 1).

Oltre a questo fuso se ne forma un altro che sembra manchi nella Joenia, costituito da filamenti sottilissimi che si originano anch'essi nei punti in cui

termina il fuso esterno, e penetrano per una interruzione della membrana nucleare fino a contatto coi cromosomi (fig. 2). Lo denomineremo perciò fuso interno, notando che le sue fibre sono incomplete, che corrisponde al così detto fuso costituito da due semifusi, e che i suoi estremi sono fuori del nucleo.

Una formazione simile è stata descritta nella Noctiluca dal Calkins, colla differenza che nella Noctiluca agli estremi del fuso esistono due grandi sfere attrattive e centrosomi, che non trovo nella Triconinfa.

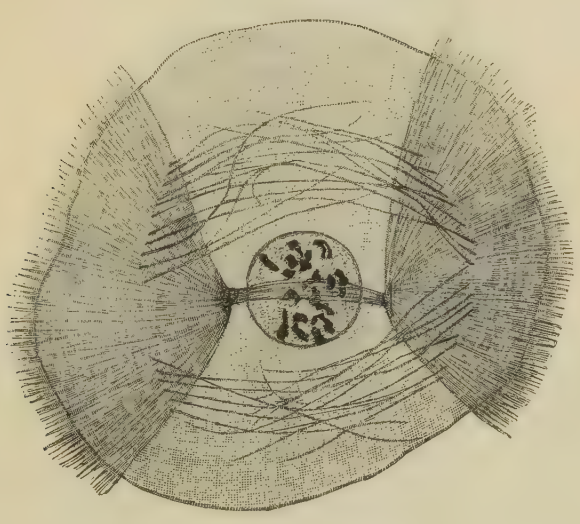


Fig. 1. — Parte superiore di *Trichonympha agilis, forma minore,* durante la divisione. La cromatina del nucleo è divisa in tanti cromosomi. Al di sopra del nucleo si vede il fuso esterno, non si distingue ancora il fuso interno. I grossi fili che si intrecciano (nella figura risultano disposti superiormente ed inferiormente al nucleo) sono i fili che costituivano il cestello, prima che cominciasse il processo di divisione. I filamenti sottili, a destra e a sinistra della figura sono i flagelli. L'area flagellata evidentemente è divisa in due metà distanti l'una dall'altra.

Proseguendo il processo di divisione il fuso esterno si allunga e si assottiglia, poi si divide a metà, e prima che i due individui si siano separati è già scomparso.

La cromatina, nel nucleo allo stato di riposo, è costituita da grossi granuli tutti uguali disposti molto regolarmente.

In seguito sembra che si formi un gomitolo, ma non è facile determinare la cosa con precisione, perchè la sostanza cromatica nei miei preparati appare accumulata verso la parte centrale, e forma una massa che si colora intensamente.

A volte, verso la periferia, si vedono filamenti acromatici che vanno verso la membrana e su di essi si trovano granuli di cromatina. Tutto questo processo sarà meglio precisato nel lavoro in esteso.

Ad un dato momento si presentano nel nucleo tanti cromosomi ben distinti, grossi e corti, disposti senza ordine apparente (fig. 1).

Successivamente questi cromosomi si dispongono in due serie, si allungano e si assottigliano. A ciascuno di essi si attacca almeno un filamento del fuso interno, destinato, se si accolgono le interpretazioni date da autorevoli istologi, a trascinarli ai due poli del nucleo (fig. 2).

Fig. 2. — Stadio ulteriore di divisione della forma rappresentata nella figura 1. I cromosomi sono disposti in due serie. Ad un estremo di ciascuno di essi, si vede un filamento del fuso interno. Per il resto, cfr. la spiegazione della figura precedente.

Non ho mai veduto una divisione longitudinale dei cromosomi, nè del gomitolo.

In tutto questo periodo il nucleo è aumentato molto di volume ma persiste ancora la membrana cellulare.

In seguito anche la membrana si divide in due, si formano così due nuclei e si separano i due individui.

I nuovi individui appena formatisi per divisione si riconoscono molto facilmente per i seguenti caratteri (fig. 3): la cromatina del nucleo è ancora disposta in cromosomi allungati ma nettamente separati gli uni dagli altri; persistono ancora i filamenti del fuso interno, ma come ho già detto è scomparsa ogni traccia del fuso esterno; non è ancora formato il cestello di so-

stegno del nucleo, ma una parte dei filamenti dell'antico cestello si vedono nel protoplasma; la zona striata non è completa, come non è ben costituito il collo della bottiglia.

Secondo ogni probabilità, gli altri flagelli e gli altri fili del cestello, necessari a completare l'individuo, si formano di nuovo.

Fig. 3. — *Forma minore.* Individuo da poco formatosi per divisione.

Divisione della forma maggiore.

Il processo di divisione della *Trichonympha agilis* forma maggiore è caratterizzato sopratutto dalla mancanza di distinti cromosomi.

La figura acromatica è la stessa che nel caso precedente. Si forma anche qui un fuso esterno ed un fuso interno incompleto. I filamenti che compongono questo secondo fuso sono più corti, perchè le due metà dell'individuo si allontanano meno, il nucleo aumenta meno di volume e la cromatina riempie quasi tutto lo spazio intranucleare; perciò alcune volte in alcune posizioni essi si vedono con difficoltà, ma altre volte sono evidentissimi.

Del tutto differente invece è la figura cromatica. La cromatina che allo stato di riposo presenta la stessa disposizione nelle due forme, nella forma maggiore, prima ancora che sia incominciata la divisione in due del collo e della zona striata, quando il nucleo occupa ancora la sua posizione normale, forma un gomitolo, non molto compatto, assai evidente. In seguito dopo la formazione del fuso, in questo gomitolo avviene una divisione longitudinale (fig. 4). Si ha così un filo doppio, cioè due fili, ciascuno dei quali si ripiega parecchie volte su sè stesso.

Molto probabilmente nella divisione uno dei fili cromatici va a corrispondere ad uno dei nuclei figli e l'altro all'altra. Precisare come avvenga la separazione delle due metà del filo primitivo, è cosa molto ardua; quel che è certo è che non si formano cromosomi distinti e che il gomitolo apparisce diviso in due metà (fig. 5).

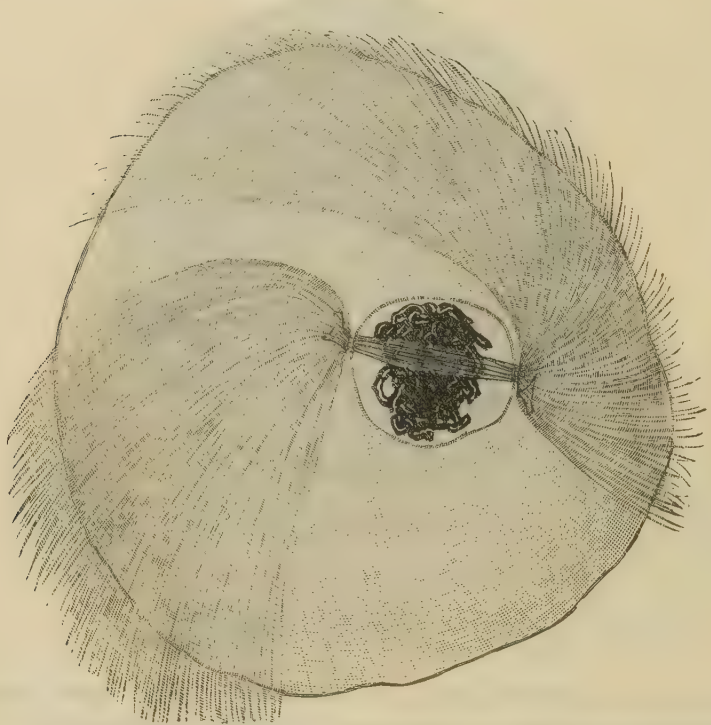


Fig. 4. — Parte superiore della *Trichonympha agilis, forma maggiore,* durante la divisione longitudinale del gomitolo cromatico. Non si vedono i fili componenti il cestello, perchè, per la lunghezza maggiore dell'area flagellata, si trovano al di sotto del tratto rappresentato nella figura.

I filamenti di ciascuna metà del fuso interno si vedono attaccati rispettivamente a ciascuna metà del gomitolo in una zona limitata: il filo del gomitolo nei punti in cui si inseriscono i fili del fuso interno, si presenta ripiegato. A questo punto avviene la divisione della membrana nucleare. Prima ancora che i due individui si separino, si vedono due nuclei ciascuno con un gomitolo, e non più superficiali.

La diversità del processo di divisione in forme tanto affini che la dif-

ferenza tra l'una e l'altra sfugge a una osservazione superficiale, prova chia-

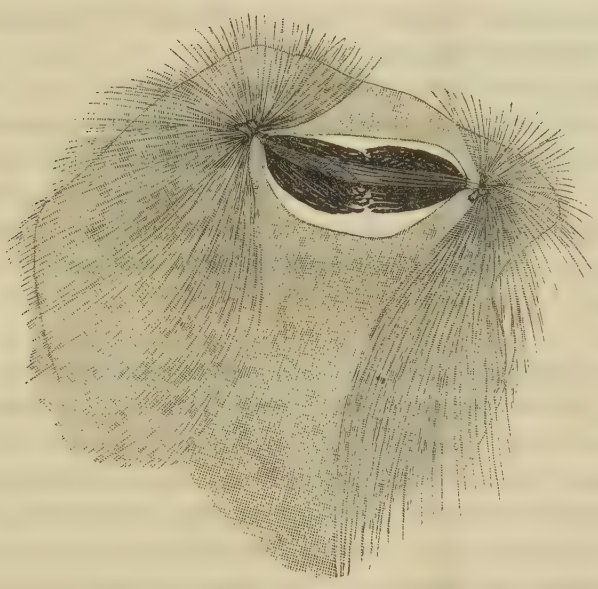


Fig. 5. — *Forma maggiore*, durante la separazione delle due metà del gomitolo. Il fuso interno cortissimo, in questa figura, si confonde cogli estremi del fuso esterno.

ramente un'altra volta che bisogna andare assai cauti nell'interpretazione dei fenomeni della carioderesi.

Zoologia. — *Il cranio dei Teleostei in rapporto al loro genere di vita.* Nota di Felice Supino, presentata dal Socio B. Grassi.

Dall'epoca nella quale si riteneva che negli abissi marini facesse difetto la vita, fino ad oggi, le nostre conoscenze sulle grandi profondità marine sono di molto progredite e specie dopo i celebri viaggi del Challenger (1872-1877), del Washington (1881), della Vettor Pisani (1882-1885), della Valdivia (1898-99) e di altri ancora, non solo abbiamo veduto che negli abissi del mare esiste la vita, ma che si trova una fauna copiosa e caratteristica degna di tutta la nostra attenzione per il suo grande interesse.

Il fatto di riscontrare animali a profondità così grandi, ha fatto subito venire l'idea che, date le condizioni molto diverse da quelle che si riscontrano alla superficie, specie per la mancanza quasi assoluta di correnti, di luce, per la temperatura, ma più che tutto per la grande pressione, gli esseri

che si trovano a queste considerevoli profondità presentassero caratteri speciali e nella loro organizzazione differenze notevoli rispetto a quelli che vivono alla superficie. Ciò che infatti avviene per molti animali o parti di loro. Ma ora si tratta di vedere se queste differenze si riscontrano in tutte le parti dell'organismo ed in qual misura.

Io già da qualche tempo mi occupo dello studio del cranio dei Teleostei allo scopo sia di portare un contributo alla craniologia comparata di questo gruppo di animali, sia di vedere appunto se la profondità abbia una qualche influenza sulle ossa del cranio e sulla relativa quantità di cartilagine da questi pesci posseduta (1). Devo qui far notare che mi sono per queste ricerche sempre servito di esemplari adulti e fra questi dei più grandi che mi è stato possibile avere.

Dopo che Gegenbaur pubblicò il suo pregevole studio sull'*Alepocephalus rostratus* (2), si potè pensare che la grande quantità di cartilagine posseduta da questa forma, fosse dovuta alle condizioni d'ambiente, alla profondità nella quale essa vive, si trattasse perciò di un fenomeno secondario. Gli studî a questo riguardo furono tutt'altro che numerosi, e nessuno ha mai cercato di definire la quistione. L'aver pescato delle forme di profondità che possedevano abbondante cartilagine e le cui ossa del cranio si presentavano molto più esili rispetto a quanto si riscontra nelle forme di superficie, aveva in certo modo confermata l'ipotesi che si trattasse di fenomeni secondarî dovuti all'ambiente. Per cui il concetto che si aveva dei pesci che vivono a grande profondità, era che possedessero maggior quantità di cartilagine rispetto a quelli di superficie e che le ossa in generale si presentassero più assottigliate ed esili. Tantochè si era già pensato a fenomeni di genestasi dovuti appunto all'influenza dell'ambiente. Ed alcuni fatti sembrerebbero confermare questa ipotesi. Così per esempio se noi osserviamo il cranio dell'*Hoplostethus mediterraneus* vediamo subito che le ossa sono in sommo grado esili e trasparenti, e che d'altra parte la cartilagine primitiva è molto abbondante. Confrontando questo cranio con quello dell'*Holocentrum samara* che appartiene alla stessa famiglia *Berycidae* ma che però vive alla superficie, si nota subito la differenza, perchè questo ha ossa più robuste e cartilagine molto scarsa. Però se noi estendiamo lo studio, vediamo che le cose non procedono sempre allo stesso modo. E prima di entrare in particolari, cerchiamo di porre bene la questione.

(1) Ebbi già occasione di accennare a questo problema in occasione del IV Congresso zoologico tenutosi in Rimini nel 1903, ma allora mi limitai solo ad enunciare qualche conclusione senza entrare in alcun particolare, ciò che è oggetto della presente Nota.

(2) Gegenbaur, *Ueber das Kopfskelet von Alepocephalus rostratus*. Morph. Jahrb. 4 Bd. Suppl. Heidelberg, 1878.

Noi dobbiamo pensare che se forme affini ma viventi le une a gran profondità, le altre alla superficie presentano condizioni differenti rispetto alla quantità di cartilagine, ciò andrebbe con ogni probabilità dovuto riferire a condizioni speciali dell'ambiente; ma se nello studio delle varie forme si riscontrasse che non esiste alcun rapporto tra la quantità di cartilagine posseduta da una data forma e la profondità alla quale essa vive e che forme affini presentano le stesse condizioni rispetto alla quantità di cartilagine, sia che vivano alla superficie o a grande profondità, allora il fenomeno dovrebbe considerarsi come primitivo.

Più esteso che sarà lo studio delle forme e maggior probabilità avremo di avvicinarci alla soluzione del problema; intanto però si può, esaminando alcune famiglie, farci un'idea generale del come procedano le cose. Giova intanto notare che tutti quelli che si sono finora occupati di ricerche anatomiche sul cranio dei Teleostei tenendo conto della cartilagine, hanno preso in considerazione quasi esclusivamente forme appartenenti ai Malacotteri, lasciando da parte gli altri ordini di Teleostei. Ora dal punto nostro di vista, ciò non può condurci alla soluzione del problema, poichè essendo i Malacotteri forme meno evolute che non gli Acantotteri, sarà difficile il giudicare se l'abbondante quantità di cartilagine che si trova nel loro cranio, sia dovuta al fatto dell'essere questi pesci relativamente bassi rispetto alla loro organizzazione, oppure debba considerarsi come un prodotto dell'ambiente, della profondità cioè alla quale essi si trovano. Quelle invece che potranno darci un criterio più esatto sono le forme più evolute, gli Acantotteri, nei quali la cartilagine si presenta relativamente più scarsa e dove confrontando forme affini viventi alla superficie e negli abissi, possiamo farci un più esatto giudizio. È dunque in queste forme che noi dobbiamo specialmente fare le nostre ricerche.

Riferendomi ora all'esempio sopra riportato, se noi esaminiamo due forme appartenenti allo stesso ordine degli Acantotteri, alla stessa famiglia *Berycidae*, l'*Hoplostethus* e l'*Holocentrum*, delle quali la prima vive a 592 metri circa di profondità (1), la seconda alla superficie, vediamo che esiste una notevole differenza tra il cranio di queste due forme. Il cranio dell'*Hoplostethus* è, come ho già accennato, costituito di ossa sottili e trasparenti e la cartilagine è molto abbondante; quello dell'*Holocentrum* si presenta invece più robusto, le ossa sono più spesse e la cartilagine è assai scarsa (2). Ciò dunque farebbe ritenere

(1) Supino F., *Morfologia del cranio dei Teleostei - Berycidae*. Lux. Roma, 1904.

(2) La profondità alla quale si trova una data forma è stata desunta dallo studio di varie opere e specialmente dall' « *Oceanic Ichthyology di George Brown Good and Tarleton H. Bean* » dalla « *Introduction to the Study of Fishes di Günther* » e dall'opera di Grassi sui *Murenoidi* non ancora pubblicata e da lui gentilmente messa a mia disposizione.

che le condizioni speciali nelle quali si presentano queste due forme fossero dovute all'ambiente, e che perciò la quantità di cartilagine posseduta dall'*Hoplostethus* fosse un fenomeno secondario da attribuirsi probabilmente a genestasi od arresto di sviluppo.

Ma se noi estendiamo lo studio e prendiamo a considerare altre famiglie di Acantotteri, noi vediamo che le cose non procedono sempre allo stesso modo. Esaminiamo per esempio la famiglia *Percidae* nella quale si trovano forme viventi a profondità ed alla superficie. Così la *Perca fluviatilis* è forma di superficie; il *Pomatomus telescopium* invece arriva fino alla profondità di 600 metri. Si hanno perciò in questa famiglia due forme che hanno un *habitat* molto diverso: la *Perca* alla superficie, il *Pomatomus* a profondità. Ebbene se noi compariamo il cranio di queste due forme, noi osserviamo che le ossa si presentano grosse e spesse tanto nell'una che nell'altra e a questo riguardo non sapremmo vedere fra le due una differenza apprezzabile. Vediamo ora come si comporta la cartilagine. Secondo quanto abbiamo sopra esposto, sembrerebbe che dei due, il *Pomatomus* dovesse esser quello che presenta maggior quantità di cartilagine poichè esso vive a grande profondità, mentre la *Perca* è di superficie, ma le cose vanno tutte all'opposto, poichè la *Perca* è invece quella che ne presenta di più. Le differenze non sono grandi ma però sempre apprezzabili. Se noi poi esaminiamo il cranio delle varie forme costituenti la famiglia *Percidae* nella quale si trovano condizioni di *habitat* le più svariate, vediamo che in esse la cartilagine si presenta presso a poco disposta nello stesso modo e nella stessa quantità relativamente alla proporzione dei varî cranî, qualunque sia la condizione di vita di queste forme, sia che si tratti del *Pomatomus* che è di profondità, come del *Labrax* o della *Perca* che sono di superficie ed in ogni caso, ripeto, è la *Perca* quella che ne presenta un po' di più, mentre essendo forma di superficie, ne dovrebbe presentare quantità molto minore rispetto alle altre e specialmente al *Pomatomus* (1).

Si potrebbe pensare che la *Perca* conservasse la cartilagine più delle altre forme, per essere un pesce di acqua dolce; in altre parole potrebbe venire il sospetto che l'acqua dolce avesse il potere di conservare questo carattere primitivo più di quanto possa fare l'acqua marina. Ma anche questa ipotesi, del resto non suffragata da alcun fatto positivo e che io accenno solo per scrupolo di ricerca, non mi sembra probabile anche per questa circostanza, che cioè forme viventi nelle acque dolci e forme viventi nel mare pure appartenenti alla stessa famiglia, non presentano a questo riguardo differenza di sorta. Io ho esaminato, fra le altre, due specie appartenenti alla stessa famiglia ed allo stesso genere, e cioè il *Cottus gobio* che vive nei fiumi, ed il *Cottus scorpius* che vive nel mare. Ebbene nessuna differenza apprezzabile, data la relativa proporzione del cranio, esiste fra loro nei ri-

(1) Supino, F., *Morfologia del cranio dei Teleostei - Percidae* Lux. Roma, 1904.

guardi della quantità di cartilagine. In ogni modo non esistono, come ho già detto, differenze marcate nei riguardi della quantità di cartilagine tra il *Pomatomus* ed il *Labrax* pur essendo questa una forma marina e non di profondità.

Un altro esempio ci è dato osservando la *Trigla lyra* ed il *Peristedion cataphractum* fra le *Triglidae*; la *Scorpaena scrofa* ed il *Sebastes dactyloptera* fra le *Scorpaenidae* (1). La quantità di cartilagine si trova presso a poco nella stessa quantità tanto nella *Trigla* che nel *Peristedion* e nel caso essa è, quantunque non in grande proporzione, più abbondante nel *Peristedion* che nella *Trigla*, e ciò sebbene questa giunga ad una profondità di 445 metri circa, mentre il *Peristedion* si trovi generalmente alla profondità di 50-150 m. Aggiungerò di più che differenze piccolissime e appena apprezzabili esistono anche fra la stessa *Trigla lyra* e la *Trigla corax*, la prima delle quali vive, come abbiamo già detto, a 445 m. di profondità, mentre la seconda si trova generalmente in acque poco profonde (Doderlein). Anche nella *Scorpaena* e nel *Sebastes* la cartilagine si trova presso a poco nella stessa proporzione, quantunque la prima viva a poca profondità, mentre il secondo giunga alla profondità di 300 m. circa.

Se si confrontano i crani di *Lepidopus caudatus* e di *Trichiurus muticus* (2), il primo dei quali vive ad una profondità di 630 m. circa e solo raramente viene alla superficie, mentre il secondo, che si trova nei mari dell'India e della Cina, sta generalmente in vicinanza alle coste (Günther), noi arriviamo allo stesso risultato. La cartilagine è scarsa in ambedue e tra il *Lepidopus* ed il *Trichiurus*, quantunque abbiano un *habitat* così diverso, non si riscontra a questo riguardo differenza di sorta.

Per citare un altro esempio dirò che il *Macrourus trachyrhynchus* è un Anacantino che fu pescato alla profondità di 546-2550 m., e che il *Ruvettus pretiosus*, un Acantottero, vive alla profondità di 546-728 m. Ebbene il primo mentre presenta nello scheletro cefalico scarsissima cartilagine, ne ha invece abbondante nello scheletro viscerale (3). Questa condizione di cose non mi pare facilmente spiegabile, ove si ammettesse che la cartilagine fosse un prodotto della profondità, poichè non si comprenderebbe come questa avesse agito più sulle ossa dello scheletro viscerale che non su quelle dello scheletro cefalico.

Il *Ruvettus* presenta scarsa cartilagine sia nello scheletro cefalico che nel viscerale (4). In ambedue poi le ossa si presentano forti e robuste, e non si rivelerebbero certamente al loro aspetto esterno forme di profondità.

(1) Supino F., *Morfologia del cranio dei Teleostei* Fam. *Triglidae* Lux., Roma, in corso di publicazione.

(2) F. Supino, *Morfologia del cranio dei Teleostei* Fam. *Trichiuridae* Lux. Roma, 1904.

(3) F. Supino, *Ricerche sul cranio dei Teleostei*, II. *Macrourus*. Ric. Lab. Anat. norm. Univ. Roma ed altri Lab. biol., vol. IX, fasc. 2, 3.

(4) F. Supino, ibid. III. *Ruvettus*, ibid.

Io ho potuto inoltre osservare che in alcune forme di dimensioni assai maggiori delle normali e che dovevano considerarsi come forme di età molto avanzata, la cartilagine si presentava assai più scarsa che non in altre appartenenti alla stessa specie e che pure erano adulte e relativamente di grandi dimensioni. Ciò dimostrerebbe che anche dopo che l'animale ha raggiunto lo stato adulto, la cartilagine va via via riducendosi, come del resto avviene in molti animali, e poichè si deve pensare che se mai la genestasi per effetto dell'ambiente deve aver luogo quando l'animale è ancora in via di sviluppo, così mi pare che anche questo fatto sia contrario alla ipotesi dell'arresto di sviluppo in causa della profondità alla quale vive una data forma.

Se infine noi prendiamo in considerazione anche i Malacotteri, i quali presentano generalmente abbondante cartilagine, noi osserviamo che non sempre la quantità di cartilagine che il loro cranio presenta è in diretto rapporto con la profondità alla quale vivono. Così per esempio dello *Scopelus Benoiti*, *Chauliodus Sloani* ed *Argyropelecus hemigymnus*, è il secondo quello che possiede maggior quantità di cartilagine, poi viene l'*Argyropelecus* e da ultimo lo *Scopelus*. Eppure lo *Scopelus* vive alla profondità di 4550 m., l'*Argyropelecus* a 400-2904 m. ed il *Chauliodus* a 891-4682 m. (1).

Rimarrebbero da considerare certi fatti che si riscontrano in alcuni pesci abissali e che potrebbero far pensare a condizioni speciali dovute alla profondità. Intendo parlare di quelle lacune che trovansi in varie parti del cranio di alcune forme, come ad esempio il *Macrourus* ed altre. Ora sono queste lacune, che si trovano in varie ossa o nei punti di confine fra varie ossa, dovute ad arresto di sviluppo in causa dell'ambiente abissale? Non mi sembra probabile, anche perchè esse si riscontrano pure in forme di superficie come ad esempio in alcuni *Characinidi*. È probabile, come dice anche Sagemehl a proposito dei *Characinidi* (2), che queste lacune servano a dar leggerezza alle varie ossa e quindi a tutto il cranio. In ogni modo questi sono fatti secondarî che non hanno, mi pare, grande importanza per il nostro argomento.

Studî ulteriori ci faranno apprezzare meglio questi fatti; ma da quanto ho sopra esposto si può già concludere in tesi generale che la quantità di cartilagine che si trova nei pesci viventi a profondità non è da considerarsi come un fenomeno secondario, un prodotto dell'ambiente, un arresto di sviluppo. Le condizioni così variate che abbiamo visto riscontrarsi nelle diverse

(1) F. Supino, *Ricerche sul cranio dei Teleostei.* I. *Scopelus, Chauliodus, Argyropelecus.* Ric. Lab. Anat. norm. Univ. Roma ed altri Lab. biol., vol. VIII, fasc. 3.

(2) Sagemehl, *Beitr. zur vergleich. Anat. d. Fische.* III. *Das Cranium der Characiniden nebst allg. Bemerk. über der mit einem Weber'schen Apparat versehenen Physostomenfamilien.* Morph. Jahrb. X Bd.

forme ci fanno invece pensare che nei riguardi della quantità di cartilagine non esiste una legge assoluta, ma ciascuna forma ha quella quantità di cartilagine che le è propria, indipendentemente dalla profondità alla quale essa vive. La cartilagine dovrebbe perciò nei pesci di profondità essere considerata con ogni probabilità come un fenomeno primitivo, e tutto concorre perciò a farci ritenere che la profondità ha, almeno nei riguardi della cartilagine, poca o nessuna influenza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il prof. B. Grassi presenta, a nome dell'autore, l'opera in due volumi: *Pesche e peschiere antiche e moderne nell' Etruria marittima* del sig. Raffaele del Rosso, dandone la seguente notizia.

L'autore vorrebbe rialzare le sorti dell'acquicoltura italiana, purtroppo tanto trascurata; egli si occupa più specialmente dei laghi salsi dei quali ha studiato con cura particolare quello di Orbetello, sua patria.

Benchè non scienziato di professione, con lunghe fatiche egli ha approfondito l'argomento, e perciò le conclusioni a cui viene hanno un indiscutibile valore.

La parte molto originale della sua opera riguarda l'interpretazione da darsi a certe ruine imponenti dal lato architettonico e idraulico dell' Etruria marittima, le quali, per quanto io so, finora erano state poco studiate, e giudicate bagni marini. Il Del Rosso dimostra che sono invece *peschiere*, così la tagliata etrusca dell'Ansedonia, detta anche volgarmente Bagno della Regina. In essa l'autore vede non un bagno ma una mirabile opera costituita col taglio di durissime scogliere per mantenere sicuramente aperta la comunicazione di un bacino interno col mare e una stupenda peschiera con annesso vivaio in acqua salsa. Precisando, secondo l'autore, esisteva un grandissimo lago di acqua dolce vicino all'antica Cosa e là dove attualmente si trovano i grandi paduli di Selvanera, di Macchiatonda e di Chiarone e il piccolo lago di Burano. Oggi ancora al lago di Burano, come anche in corrispondenza ad altri laghi littoranei, si fanno le così dette sfociature, mettendoli in comunicazione col mare attraverso le rene delle dune in ore e stagioni opportune. Queste sfociature, immettendo acqua dolce nell'acqua salata, traggono dall'aperto mare nel lago frotte di spigole e di muggini spesso molto grossi.

Il Del Rosso dimostra che la tagliata dell'Ansedonia rappresentava appunto un'applicazione grandiosa di questa umile cognizione che non fa difetto a nessun pescatore. Tale tagliata costituiva un meraviglioso richiamo di acqua dolce che scendeva al mare dall'emissario del lago di Cosa e veniva con

apposita cateratta giudiziosamente regolato; questo richiamo gli Etruschi lanciavano in mare a tempo opportuno. La tagliata era, insomma, un mezzo di pesca automatica con la quale inducevano il pesce del mare a risalire nel loro lago e nei vivai costituiti lungo la spiaggia marina.

Prova inoltre l'autore che sono vere *peschiere* e *vivai salsi romani* certe « grandiose e solidissime murature che in pieno mare presso le rive, hanno sfidato i flutti delle burrasche di oltre venti secoli e sono giunte, per quanto era subacqueo, quasi intatte a noi ».

Opere di questo genere, per es., si trovano alla Santa Liberata, già Villa dei Domizi Enobarbi, sull'Argentario.

Sulla carta topografica militare questi vivai salsi di S. Liberata sono segnati come bagni di Domiziano, ed erano stati a torto giudicati « bagni marini, cantine, cammini coperti, ripostigli, ecc. ».

Occorre sapere che alla Santa Liberata mancava per i vivai marini un fiume che fornisse acque aereate, che con il suo livello, prevalente sempre su quello del mare, permettesse la totale e rapida rinnovazione delle acque dei vivai, che ne correggesse opportunamente il grado di salsedine e che infine fosse usufruibile per la pesca automatica attraendo con un filo d'acqua dolce dal mare nel vivaio torme di muggini e di spigole. Si dovette trovare un compenso a questa mancanza d'un fiume, usando delle più prossime sorgenti dell'Argentario; perciò tutto il piccolo promontorio della Santa Liberata fu trasformato in quel mirabile sistema di più o meno vaste cisterne collegate coi vivai in pieno mare, che possiamo ammirare ancora oggi.

In conclusione erano annessi alla villa dei Domizi Enobarbi, sì grandiosi vivai, come scrive il Del Rosso « per serbare spigole, muggini e pochi altri pesci, automaticamente racchiusi, con mirabile metodo di allevamento cresciuti, evidentemente non per speculazione ma per puro lusso ».

L'autore ritiene che anche nelle ville imperiali di Anzio e di Astura certi ruderi interpretati come bagni siano invece veri vivai.

Io stesso ho visitato in compagnia del Del Rosso le sunnominate località dell'Etruria marittima: le di lui interpretazioni, a mio avviso, sono essenzialmente ben fondate, e insostenibile invece quelle totalmente differenti di altri studiosi non addentro in questioni di piscicoltura. È certo che in questo, come in molti altri casi il portare nel campo archeologico cognizioni speciali tecniche, può condurre a risultati importanti e inaspettati.

L'opera del Del Rosso apparisce forse incompleta all'archeologo di professione, gli apre però, non v'ha dubbio, nuovi e inaspettati orizzonti.

Anche per l'ingegnere i ruderi studiati dal Del Rosso hanno certamente grandissimo interesse, essendo ancor oggi molto ardua impresa l'aprire bocche a mare, che come quella di Nassa presso la villa dei Domizi Enobarbi, che possano restare migliaia d'anni e senza alcuna manutenzione, libere di rene e di alghe.

Anzi il compianto senatore Cremona, col quale mi ero a lungo trattenuto su questo argomento, riteneva opportuno che gli alunni della scuola degli ingegneri, in occasione di qualche viaggio d'istruzione, visitassero le località in discorso.

Ma l'opera del Del Rosso non ha scopo speciale archeologico o idraulico; egli fa tesoro di quanto gli hanno appreso i vivai salsi degli antichi per proporre vivai di acclimatazione, dai quali la produttività dei nostri luoghi salsi potrebbe trarre moltissimi vantaggi.

Andrei troppo per le lunghe se volessi esaminare tutta l'opera; il poco che ne ho detto basta per dimostrare che il Del Rosso si è reso grandemente benemerito dell'importantissima industria della pesca, che la storia delle pesche e delle peschiere antiche deve accendere l'animo dei maremmani a emulare i prodigi dei loro antenati e che i volumi del Del Rosso meritano di essere presi in considerazione anche dagli archeologi.

Di fronte a tanti meriti svaniscono le mende che qua e là si potrebbero riscontrare.

Prima di finire mi permetto però di richiamare l'attenzione sul capitolo che riguarda le celebri anguille di Orbetello. Le anguille si distinguono in argentee dette diritte ad Orbetello, e gialle dette ivi storte.

È noto che le argentee hanno maggior valore di quelle gialle e tra le argentee quelle grosse dette capitoni, sono molto più pregiate, come tutti sanno.

Orbene a Orbetello più del 99 % delle anguille argentee non raggiungono mai la lunghezza di 50 cm., e perciò i capitoni sono molto scarsi, mentre nelle lagune venete e in tante altre località, la proporzione delle anguille argentee sotto i 50 cm. è notevolmente minore, e i capitoni sono relativamente molto più numerosi. A Orbetello v'era chi deplorava questa differenza e cercava la ragione dello strano fenomeno e non perdeva la speranza di poter trovar modo di fare ingrossare le anguille che la natura matrigna manteneva piccole.

V'era forse chi aspettava questo miracolo dalle benedizioni della chiesa, chi dalla scienza, chi dal governo, e ciò fino al giorno in cui per caso io mi trovai ad Orbetello. Quivi con somma sorpresa di tutti constatai che le anguille diritte di Orbetello sono nella proporzione di oltre il 99 % maschi, i quali, come è noto, non possono raggiungere mai 50 centimetri di lunghezza.

Così quei di Orbetello si sono dovuti persuadere che le loro anguille diritte non possono allungarsi, e un enigma è sciolto, ma se ne è sostituito un altro, cioè la ragione dell'accumularsi di tanti maschi.

Questi fatti, che io non avevo avuto ancora occasione di pubblicare, vengono debitamente citati e registrati nell'opera del Del Rosso, il quale con buon fondamento ritiene che, se si abolisse la pesca vagantiva nel lago d'Orbetello, quivi il numero dei capitoni aumenterebbe considerevolmente.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLE UNIVERSITÀ DI BERN E DI GIESSEN.

I. — BERN.

Allemann O. — Ueber Permanganmolybdate. Bern, 1904. 8°.

Axelrad C. — Ueber Morphologie der Colonieen pathogener Bakterien. Leipzig, 1903. 8°.

Backmund K. — Entwickelung der Haare und Schweissdrüsen der Katze. Wiesbaden, 1904. 8°.

Bandi W. — Beiträge zur Biologie der Uredineen (Phragmidium subcorticium [Schrank] Winter Puccinia Caricis montanae Ed. Fischer). Dresden, s. a. 8°.

Billwiller R. — Der Bergeller Nordföhn. (Sonder-Abd. aus den Annalen der Schweiz. Meteorol. Centralanstält. Jahrg. 1902). Zürich, 1904. 4°.

Blum A. — Ueber Silicovanadinmolybdate. Bern, 1904. 8°.

Blumberg M. — Synthese das 3. 4. Dioxy-β-Methyl-Chromons. Bern, 1904. 8°.

Breidert K. — Ueber intracerebrale Injektionen einiger Infektionsstoffe. (Sonder-Abd. aus Fortschritte der Veterinär-Hygiene). Bern, 1903. 4°.

David E. — Synthese des 2-Oxychromons und des 3-4-Dioxychromons. Bern, 1904. 8°.

Döbeli E. — Ueber die Bildung des Sekrets bei der Ozaena. Berlin, 1903. 8°.

Driessen Mareew (W. P. H. v. d.). — Ueber die Samen von Barringtonia speciosa (Gaertn). Utrecht, s. a. 8°.

Eijken P. A. A. F. — Untersuchungen von in Bern cultivirten Rhabarberrhizomen (Rheum palmatum β tanguticum und Rheum officinale Baillon). Utrecht, s. a. 8°.

Elias B. — Untersuchungen über die Struktur des Zellleibes der Ganglienzellen. Berlin, 1904. 8°.

Engel W. — Ueber Natriumphosphorvanadinmolybdate. Berlin, 1904. 8°.

Erdély A. — Ueber die Beziehungen zwischen Bau und Funktion des lymphatischen Apparates des Darmes. München, 1904. 8°.

Ferié F. — Zur Kenntnis der Fette. Bonn, 1903. 8°.

Fischer C. — Toxikologische Versuche mit Cocaïnum hydrochloricum. Stuttgart, 1903. 8°.

Gander G. — Du cancer précoce de l'estomac. La Chaux-de-Fonds, 1904. 8°.

Goldstern D. — Zur Kenntnis des Brasilins. Bern, 1903. 8°.

Haan F. — Untersuchungen über Verstärktes Ester-Dermasan (für Thiere). Stuttgart, 1904. 8°.

Hamburger R. — Ueber die paarigen Extremitäten von Squalius, Trigla, Periophthalmus und Lophius. Genève, 1904. 8°.

Heicke A. — Ein Beitrag zur Kenntnis der Weichteile der Madreporarier. Berlin, 1904. 8°.

Helmich Fritz. — Beiträge zur Kritik der Abstammungsfrage des Hausrindes mit besonderer Rücksicht auf die heutigen Niederungsschläge. Bern, 1904. 8°.

Henzerling H. — Ueber das technische sog. « Phosphorsesquisulfid ». Marburg, 1903. 8°.

Heydemann A. — Histologische Untersuchungen über das Luftblasengekröse des Schweines. Berlin, 1904, 8°.

Hirs E. — Die ätiologische Bedeutung der Oelkuchenfütterung für das Klauengeschwür beim Rinde. Berlin, 1904. 8°.

Hoffmann A. — Untersuchungen über den Einfluss der Hetolbehandlung auf die Impftuberculose der Meerschweinchen und der Kaninchen. Berlin, 1904. 8°.

Hollerbach Ch. — Linse und Corpus epitheliale im Cephalopodenauge und ihre Entwicklung. Oppenheim, s. a. 8°.

Howaldt J. — Ueber Vanadylverbindungen. Bern, 1904. 8°.

Ibel J. — Die mikroskopisch-anatomischen Veränderungen bei gelbem Galt (kontagiöse Galactophoritis) und bei der Hyperämie des Kuheuters, ferner bei der infektiösen Agalaktie der Ziege. Ueber die Milchsekretion ausserhalb der normalen Laktationszeit, speziell bei drei neugebornen Zicklein. Berlin, 1903. 8°.

Isenschmid M. — Ueber eine von Dr. Walther Volz in Sumatra gemachte Sammlung von Batrachiern. Bern, 1903. 8°.

Janower M. — Die Gattung Solenocaulon. Genève, 1904. 8°.

Jenny H. — Ueber die Beeinflussung der Jodkaliumausscheidung durch Diuretica nebst Untersuchungen über die Ausscheidung bei Nephritikern. Bern, 1904. 8°.

Jochum E. — Ueber das 1, 3-Dioxy-β-Methylchromon. Versuche zur Synthese des Kämpferols. Bern, 1904. 8°.

Jordi E. — Beiträge zur Kenntnis der Papilionaceen bewohnenden Uromyces-Arten. Jena, 1904. 8°.

Keller F. — Ueber Perkobaltmolybdate. Bern, 1904. 8°.

Kirsten A. — Die Varietäten des Bacillus oedematis maligni. Berlin, 1904. 8°.

Koritschoner F. — Untersuchungen über das Russische Pech und das Harz von Pinus palustris. Wien, 1903. 8°.

Krembs R. — Zur Kenntnis des Catechins. Bern, 1903. 8°.

Kreutzer M. — Experimentelle Untersuchungen über die antidiarrhoische Wirkung des Tannalbinum veterinarium und dessen praktische Verwertung in der Tiermedizin. München, 1904. 8°.

Kugler S. — Synthese des Isofisetins, (2′, 3′, 4′ Trioxyflavonol) Synthese des 3′, 4′ Dioxy-α-Phenylcumarins. Bern, 1904. 8°.

Kümmel H. — Die progressive Zahnkaries in Schule und Heer und die zahnhygienischen Aufgaben der Sanitäts-Behörden im Interesse der Volkswirtschaft. Berlin, 1904. 8°.

Ladame H. — Contribution à l'étude de la Mortinatalité suisse. Genève, 1904. 4°.

Leonhardt W. — Experimente und Studien zur Hirndruckfrage. Leipzig. 1903. 8°.

Liebe A. — Zwei Fälle von Hermaphroditismus verus bilateralis bei Schwein. Berlin, 1904. 4°.

Liebert A. — Ueber die Fundusdrusen des Magens beim Rhesus-Affen. Wiesbaden, 1903. 8°.

Liez H. — Die Verteilung der mittleren Höhe in der Schweiz. Bern, 1903. 8°.

Lloyd L. L. — Studien über Chromonderivate. Bern, 1903. 8°.

Luginger J. — Streptothricheen als Ursache von Endocarditis beim Rind. Stuttgart, 1904. 8°.

Luhrs E. — Anatomische und histologische Untersuchungen des Nervus recurrens sinister von mit Hemiplegia laryngis behafteten Pferden. Berlin, 1904. 8°.

Lux A. — Ueber den Gehalt der frisch gemolkenen Milch an Bakterien. Jena, 1903. 8°.

Maier A. — Vergleichende Untersuchungen über die elastischen Fasern des Herzens von Hund und Pferd. Nürnberg, s. a. 8°.

Marxer A. — Beitrag zur Frage des Bakteriengehaltes und der Haltbarkeit des Fleisches bei gewöhnlicher Aufbewahrung. Strassburg, 1903. 8°.

Muschke G. — Zur Bildung der primitiven Choane, des Jacobson'schen Organs und der Stenson'schen Gänge. Berlin, 1904. 8°.

Meisel J. — Ueber die sogenannten Vanadylvanadinphosphate und- arsenate. Berlin, s. a. 8°.

Michaud L. — Ueber das Scheidevermogen der Niere bei Blutentzug und über die Wirkungsweise der Diuretica. München, 1904. 8°.

Moosmann A. — Ueber Gesichts-und Stirn-lagen der Berner Universitäts-Frauen-Klinik und Poliklinik in den Jahren 1874-1901. Luzern, 1903. 8°.

Müller K. — Bestimmungen des Gewichtes des Magens und Darmes bei mageren, mittelfetten und fetten Tieren und Gewichtsbestimmungen des Magen-und Darminhaltes, soweit die letzte Futterung bekannt ist. Guben, 1904. 8°.

Musterle F. — Zur Anatomie der umwalsten Zungenpapillen der Katze und des Hundes. Berlin, 1903. 8°.

Neuber E. — Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Wurzeln vorwie-

gend offizineller Pflanzen, mit besonderer Berüchsichtigung der Heterorhizie der Dicotylen. Breslau, 1904. 8°.

Paukul E. — Die Zuckungsformen von Kaninchenmuskeln verschiedener Farbe und Structur. Leipzig, 1903. 8°.

Pewsner-Neufeld R. — Ueber die Saftkanälchen in den Ganglienzellen des Rückenmarks und ihre Beziehungen zum pericellulären Saftlückensystem. Jena, 1903. 8°.

Pfersdorff F. — Ueber die schwer zugänglichen, in der Leibessubstanz enthaltenen Stoffwechselproducte des Milzbrandbacillus. — Biologie des asporogenen Milzbrandbacillus. Jena, 1903. 8°.

Piassetzka J. de. — Recherches sur la Polyvalence du Sérum antistreptococcique. Paris, 1903. 8°.

Pinagel A. —Beiträge zur Kenntnis der Wolframate und Silicowolframate. Bern, 1904. 8°.

Plattner E. — Synthese eines beizenziehenden Tetraoxyflavons. Bern, 1903. 8°.

Plaut G. — Ueber die Sulfate und Doppelsulfate des vierwertigen Ceriums. Berlin, s. a. 8°.

Polowzow W. — Ueber kontraktile Fasern in einer Flimmerepithelart und ihrer funktionelle Bedeutung. Berlin, 1904. 8°.

Priebtasch K. — Ueber die Histiogenese der Aortenwand der Säugetiere mit besonderer Berucksichtigung der elastischen Fasern. Berlin, 1903. 8°.

Probst G. — Probleme der modernen Viehzucht. München, 1904. 8°.

Quervain (A. de). — Die Hebung der atmosphärischen Isothermen in den Schweizer Alpen und ihre Beziehung zu den Höhengrenzen. Leipzig, 1903. 8°.

Rabin M. — Ueber die halbe Entschwefelung aromatischer monosubstituierter Thioharnstoffe. Synthese des β-Methyl-α-Naphtochromons. Bern, 1903. 8°.

Rauscher K. — Vergleichende Untersuchungen ueber die Knotige Leberinduration des Rindes und die Knotige Fettleber des Hundes. Stuttgart, 1903. 8°.

Rautmann H. — Zur Anatomie und Morphologie der Glandula vestibularis maior (Bartholini) bei den Säugetieren. Bonn, 1903. 8°.

Regn H. — Der Bakteriengehalt des von Rauschbrand befallenen Muskelgewebes und der Rauschbrandimpfstoffe. Berlin, 1904. 8°.

Reil H. — Beitrag zur physiologischen Chemie der Nebennieren. Oberursel, 1904. 8°.

Reutter L. — Ueber Mastix, Caricari-Elemi und über verschiedene Gräberharze aus Karthago. Bern, 1904. 8°.

Richter H. — Ueber das Vorkommen von Flimmerepithel im Centralorgan des Nerventystems. Berlin, s. a. 8°.

Biederer Th. — Ueber den Bau der Papilla mammae des Rindes. Berlin, 1903. 8°.

Bodt W. Ev. — Musik und Narkose. Bern, 1903. 8°.

Roesler A. — Zur Kenntnis der unsymmetrischen (α) Phenylhydrazinderivate. Mülhausen, 1903. 8°.

Rost A. — Monographie des Haematoxylins. Dresden, 1904. 8°.

Saal O. — Ueber Elemi Tacamahaca. Bonn, 1904. 8°.

Saenger L. — Ueber die Vena dorsalis penis. Berlin, 1904. 8°.

Simon A. — Anatomiseh-histologische Untersuchungen der Ovarien von fünfundneunzig kastrirten Kühen. Rixheim, 1904. 8°.

Skliar N. — Ueber Gefängnispsychosen. Berlin, 1904. 8°.

Steiger P. A. — Bakterienbefunde bei der Euterentzündung von Kuh und Ziege. Jena, 1904. 8°.

Studer B. — Ueber das amerikanische Colophonium. Bern, 1903. 8°.

Tropp E. — Das Scheidevermögen der Niere für Kochsalz un eine Anwendung des Aktivitätsmethode hierauf. München, 1904. 8°.

Uhlmann O. — Der Bakteriengehalt des Zitzenkanals (Ductus papillaris) bei der Kuh, der Ziege und dem Schafe. Jena, 1903. 8°.

Voirol A. — Ein Beitrag zur Aetiologie und Kasuistik des Lupus erythematodes. Berlin, 1903 8°.

Walch J. — Strangulatio ducto-spermatica. Der Ueberwurf, das Verschnüren beim Ochsen. Hannower, 1903. 8°.

Wartmann C. — Contribution à l'étude du Cancer de la lèvre inférieure. Genève, 1903. 8°.

Weber. — Mass- und Gewichtsbestimmungen über die morphologische Asymmetrie der Extremitätenknochen artiodaktyler Säugetiere — Eine osteologische Studie. — Köln, 1903. 8°.

Weil L. — Ueber den Gurjunbalsam. Bern, 1903. 8°.

Winckel M. — Ueber das angebliche Vorkommen freien Phloroglucins in den Pflanzen. Berleburg, 1904. 8°.

Wilhelmy B. — Die Bakterienflora einiger Fleischextracte nnd verwandter Präparate. Neuwied, s. a. 8°.

Winkler M. — Beiträge zur Kenntnis der benignen Tumoren der Haut. Wien etc, 1903. 8°.

Woker G. — Synthesen des 3, 4 — Dioxyflavons. Bern, 1903. 8°.

Zimmermann K. W. — Untersuchungen des Analtegumentes des Hundes. Berlin, 1904. 8°.

Zipkin R. — Beiträge zur Kenntnis der gröberen und feineren Struktur — Verhältnisse des Dünndarms von Inuus rhesus. Wiesbaden, 1903. 8°.

II. — Giessen.

Aenstoots C. — Ueber die Pupillenreaktion bei Lidschluss. Giessen, 1904. 8°.

Albert G. — Die Periostitis an der Dorsalfläche des Fesselbeins der Vorderschenkel der Pferde. Stuttgart, 1904. 8°.

Albrecht A. — Casuistische Beiträge zur Differentialdiagnose zwischen den Genital- und den Abdominaltumoren des Weibes. Breslau, 1904. 8°.

Bach H. — Die Umformungen der Kettenbrüche. Darmstadt, 1903. 8°.

Basten H. — Das Kephalhaematoma externum beim Neugeborenen insbesondere seine Aetiologie. Giessen, 1904. 8°.

Bernius F. — Ueber die Komplikation von Uteruscarcinom und Geburt. Mainz, 1904. 8°.

Biehler R. — Einfluss des Unterbaus auf das Wachstum der Bäume. Giessen, 1903. 8°.

Bierschenk F. — Zur Frage des hallucinatorischen Wahnsinns. Giessen, 1904. 8°.

Bosseljoon W. — Ueber Echinokokken im Herzen. Giessen, 1904. 8°.

Brand K. — Die elektrochemische Oxydation aromatisch gebundener Methylgruppen. Giessen, 1903. 8°.

Brauns R. — Entwicklung des mineralogischen Unterrichts an der Universität Giessen. Giessen 1904. 4°.

Bresin G. — Ueber den Einfluss hydrotherapeutischer Massnahmen auf den Stoffwechsel. Giessen, 1904. 8°.

Brück C. — Hydrolyse von Ammoniumsalzen in siedender wässriger Lösung. Giessen, 1903. 8°.

Buscherhoff G. — Ueber die Unfallverletzungen des Auges im Bergwerke. Giessen, 1903. 8°.

Dammaer B. — Das Rotliegende der Umgegend von Altenburg in Sachsen-Altenburg. Berlin, 1903. 8°.

Dennstedt A. — Die Sinus durae matris der Haussäugetiere. Wiesbaden, 1903. 8°.

Eicker C. — Ein Beitrag zur Casuistik der subcutanen Rupturen des Musculus biceps brachii. Gladbach, 1903. 8°.

Elsbergen K. — Ueber das Délorme'sche Verfahren zur Behandlung des chronischen Empyems. Greifswald, 1904. 8°.

Ermes C. — Ueber die Natur der bei Katatonie zu beobachtenden Muskelzustände. Giessen, 1903. 8°.

Fahr T. — Ueber totale Nekrose beider Nieren nach Thrombose der Nierenvenen. Giessen, 1903. 8°.

Flosdorf P. — Zwei Fälle von Hernia funiculi umbilicalis. Giessen, 1904. 8°.

Follenius R. — Ueber die elektrochemische Reduktion von Diketonen. Giessen, 1903. 8°.

Frank J. — Ein Beitrag zur intraokularen Anwendung des Jodoforms bei intraokularen Eiterungen. Giessen, 1904. 8°.

Frank M. — Elektrochemische Reduktion von fetten Nitrokörpern und Nitraminen, von aromatischen Nitrosokörpern und Nitrosaminen. Giessen, 1903. 8°.

Freytag F. — Hydronephrose mit Cystenbildung beim Fötus. Leipzig, 1904. 8°.

Fromme A. — Ueber die strahlenpilzähnlichen Bildungen des Tuberkelbazillus. Giessen, 1903. 8°.

Georgewitsch R. — Beitrag zur Kenntnis der pathogenen Eigenschaften des Bazillus der progredienten Gewebsnekrose. Homberg, 1904. 8°.

Gerhard K. — Zur Pathogenität des Bacillus pyogenes suis. Homberg, 1904. 8°.

Goldenberg T. — Beitrag zur Frage der primären multiplen bösartigen Neubildungen. Bern, 1903. 8°.

Gossmann A. — Die chronische Periarthritis Tarsi des Pferdes. Stuttgart, 1904. 8°.

Gross A. — Ueber das tuberkulöse Geschwür der Zunge. Giessen, 1904. 8°.

Gumtow A. — Ueber dem Chloroformgehalt der Organe während der Narkose. Giessen, 1904. 8°.

Günther J. B. — Ueber operative Dauererfolge bei Retroflexio uteri und Prolapsus vaginae. Mainz, 1904. 8°.

Gustasp N. — Das Stockholtz. Seine frühere und jetzige Bedeutung in Deutschland und die Maschinen zu dessen Gewinnung in Theorie und Praxis. Giessen, 1903. 8°.

Hachenberg L. — Ueber einen operativ geheilten Fall eitriger Sinusthrombose nach eitriger Mittelohrentzündung. Giessen, 1904. 8°.

Hanssen P. — Ueber zwei Fälle von Nabelschnur-Zerreissung bei normalen Geburten. Giessen, 1904. 8°.

Hartmann M. — Die Fortpflanzungsweisen der Organismen, erläutert an Protozoen, Volvocineen und Dicyemiden (zugleich Mitteilung über den Generationswechsel der Dicyemiden). Leipzig, 1903. 8°.

Hegemann F. — Erfahrungen über das Lactagol in der Universitäts-Frauenklinik zu Giessen. Leipzig, 1904. 8°.

Henze B. — Die chronische Entzündung des Fleischsaumes und der Fleischkrone und ihre Behandlung. Stuttgart, 1903. 8°.

Hermannsdörfer H. — Ameisensäure als Reductions- und als Lösungsmittel. Giessen, 1903. 8°.

Hodson F. — Resonanzversuche über die Verhalten eines einfachen Kohärers. Giessen, 1904. 8°.

Junack M. — Untersuchungen über die Aussen-Desinfection mittels mässig gespannten strömenden Wasserdampfes mit besonderer Berücksichtigung der Desinfection der Milchkannen. Stuttgart, 1904.

Keiper W. — Elektrochemische Reduktion einiger Nitro-Azo-Verbindungen. Giessen, 1903. 8°.

Kisskalt K. — Beiträge zur Lehre von der natürlichen Immunität. I. Die cutane Infection. Leipzig, 1903. 8°.

Klare P. — Ein Fall von Tumor des linken Unterhornes. Warburg, 1903. 8°.

Kothen C. — Ueber die Morbidität ein Wochenbett nach Geburt von macerirten Fruchten. Berlin, 1903. 8°.

Kösters A. — Appendicitis im Bruchsack. Giessen, 1904. 8°.

Kroemer P. — Die Lymphorgane der weiblichen Genitalien und ihre Veränderungen bei malignen Erkrankungen des Uterus. Berlin, 1904. 8°.

Krogmann H. — Die Schweinezucht im Grossherzogtum Oldenburg. Warburg, 1903. 8°.

Kurz W. — Der Uterus von Tarsius spectrum nach dem Wurf. Wiesbaden, 1904. 8°.

Landsberg G. — Ueber den Alkoholgehalt tierischer Organe. Giessen, 1904. 8°.

Langer R. — Untersuchungen über einen mit Knötchenbildung einhergehenden Process in der Leber des Kalbes und dessen Erreger. Leipzig, 1904. 8°.

Lenfers A. — Beiträge zur Synophthalmie der Haustiere. Giessen, 1903. 8°.

Lütke-Wentrup A. — Die geschichtliche Entwicklung der Pferdezucht in der Provinz Westfalen, ihre Forderung durch Staats- und Vereinshilfe und ihr gegenwärtiger Standpunkt. Münster, 1904. 8°.

Made H. — Ueber Fareysche Doppelreihen. Darmstadt, 1903. 8°.

Mannheimer E. — Einwirkung hydrolytisch gespaltener Salze auf die Hydrolyse von Natriumphenolat. Giessen, 1904. 8°.

May H. — Vergleichende anatomische Untersuchungen der Lymphfollikelapparate des Darmes der Haussäugetiere. Giessen, 1903. 8°.

Meyer F. — Untersuchungen über die multiple Necrose der Leber des Rindes. Wolgast, 1903. 8°.

Mitrowitsch G. — Beitrag zur Kenntnis der Rinderseuche (Septicaemia haemorrhagica). Homberg, 1904. 8°.

Müller M. — Beitrag zum Verhalten von Salzen in Aceton. Giessen, 1904. 8°.

Nöttebrock H. — Zur Kenntnis der fötalen Peritonitis. Giessen, 1904. 8°.

Nübling R. — Zur Kenntnis der Plumbisalze. Halle, 1903. 8°.

Oertgen J. — Ueber Gelenkmäuse. Giessen, 1903. 8°.

Ohm R. — Welchen Einfluss hat die Einführung des modernen Infanteriegeschosses auf die Prognose und Behandlung der Infanterie-Schussverletzungen gehalt? Giessen, 1904. 8°.

Palzer P. — Ueber Sehnentransplantation bei statischem Plattfuss. Giessen, 1904. 8°.

Peters J. — Untersuchungen über die Kopfspeicheldrüsen bei Pferd, Rind und Schwein. Giessen, 1904. 8°.

Pfannmüller F. — Ueber die im Baugewerbe vorkommenden Augenverletzungen. Giessen, 1904. 8°.

Rendschmidt H. — Bericht über elf Fälle von Sarkom des Uvealtraktus. Giessen, 1903. 8°

Richter F. — Experimentelle Untersuchungen der beim Nachzeichnen von Strecken und Winkeln entstehenden Grössenfehler. Naumburg, 1904. 8°.

Rommel E. — Darmerschluss durch den persistierenden, am Nabel geschlossenen Dottergang. Giessen, 1003. 8°.

Sartorius R. — Bericht über 10 Fälle von Iristuberkulose. Giessen, 1903. 8°.

Schaaf G. — Zur Kasuistik der Orbitalgeschwülste. Giessen, 1903. 8°.

Schaaf J. — Ueber die Complicationen der Schwangerschaft, der Geburt und des Wochenbettes durch Herzfehler. Wetzlar, 1903. 8°.

Schaumberger H. — Ueber einen besonderen Linienkomplex vierten Grades. Giessen, 1904. 8°.

Scheers G. — Ueber die Wirkung des Physostigmins bei Darmverschluss. Giessen, 1903. 8°.

Schmidt A. — Die Zeckenkrankheit der Rinder — Haemoglobinaemia ixodioplasmatica boum — in Deutsch —, Englisch-Ost-afrika u. Uganda. Berlin, 1904. 8°.

Schmidt O. — Untersuchungen über die Anwendung von Metallpulvern in der Chirurgie. Warburg, 1903. 8°.

Schmidt P. — Das Verhalten der Oxime von p-Amidoacetophenon und p-Acetochinaldin hinsichtlich der Beckmannschen Umlagerung. Marburg, 1904. 8°.

Schneider P. — Ein Beitrag zur Kasuistik des Carcinomo penis. Giessen, 1904. 8°.

Schraeder J. — Chemisches und physikalisch-chemisches Verhalten des Pyridins und von Metallsalzen zu und in Pyridin. Giessen, 1904. 8°.

Schubert B. — Versuche über Wertbemessung der Sobernheim schen Milzbrandserums. Leipzig, 1903. 8°.

Skazil R. — Das Kali als Pflanzennährstoff; über die Absatzverhältnisse der Stassfurter Kalisalze und die Bestrebungen von Seiten des Verkaufssyndikats der Kaliwerke zu Leopoldshall-Stassfurt diesen Absatz zu erhöhen. Giessen, 1903. 8°

Stein K. — Ein Beitrag zur Lehre von der Aetiologie der Tubargravidität. Giessen, 1904. 8°.

Strech R. — Beitrag zur operativen Behandlung der Unterschenkelvaricen. Giessen, 1904. 8°.

Tauchert F. — Das perforierende Brennen bei Spat. Pasewalk, 1903. 8°.

Thelen C. — Die Rindviehzucht im Grossherzogtum Hessen während des neunzehnten Jahrhunderts. Odenkirchen, 1903. 8°.

Tornau F. — Der Flötzberg bei Zabrze. Berlin, 1903. 8°.

Trapp M. — Ueber die Dosierung des Chloroforms mit der Maske. Giessen, 1903, 8°.

Vetter E. — Ueber Verschliessung von Bauchwunden und Bruchpforten. Darmstadt, 1904. 8°.

Vogt E. — Verhalten von Kobaltchlorür, Quecksilberchlorid und Stannochlorid in Aceton. Giessen, 1903. 8°.

Weingarten M. — Ueber Schmerzlinderung in der Geburt mit besonderer Berücksichtigung der kombinierten Skopalamin-Morphium-Analgesie. Münster in Westf., s. a. 8°.

Weyl A. — Ueber lokalisierte Tuberkulose des Collum uteri. Giessen, 1904. 8°.

Willems E. — Zur Therapie der Patellarfracturen. Köln, 1904. 8°.

Wilmes F. — Bericht über 628 Star-Operationen. Giessen, 1904. 8°.

Winterhager A. — Ueber den Einfluss der Abnabelungszeit auf die Gewichtszunahme der Kinder. Giessen, 1903. 8°.

Wirtz A. — Beitrag zur Klinik der Wachstumsstörungen, insbesondere der chondrodystrophischen Mikromelie. Giessen, 1904. 8°.

Wolff L. C. — General-Bericht über die Torfversuche zu Oldenburg im Grossherzogtum (Monat Nov. 1901) im Auftrage der Kgl. Preussischen Ministerien für Handel und Gewerbe und für Landwirtschaft. Berlin, 1904. 4°.

Zang C. — Zur Casuistik der gutartigen Geschwülste des Oesophagus. Giessen, 1904. 8°.

Zang W. — Die Anatomie der Kiefernadel und ihre Verwendung zur systematischen Gliederung der Gattung Pinus. Giessen, 1904. 8°.

Zöckler R. — Ueber elektrochemische Reduktion von Nitrochinolinen. Giessen. 1904. 8°.

Zoeppritz H. — Zur Frage der perinealen Prostatektomie. Giessen, 1904. 8°.

V. C.